

## Ćwiczenie 6: Równania różnicowe

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Dla równania różnicowego  $X_{n+1} = aX_n + b$  (i) przewidzieć rezultaty oraz (ii) potwierdzić te przypuszczenia z zastosowaniem arkusza kalkulacyjnego poprzez wyznaczenie  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$  w każdym z poniższych przypadków:
  - (a)  $a = 1.2, b = 0, X_0 = 1$
  - (b)  $a = 0.4, b = 0, X_0 = 1$
  - (c)  $a = 1.2, b = -1, X_0 = 5$
  - (d)  $a = 1.2, b = -1, X_0 = 6$
  - (e)  $a = 0.8, b = 1, X_0 = 1$
  - (f)  $a = 0.8, b = 1, X_0 = 5$
  - (g)  $a = 0.8, b = 1, X_0 = 6$
  - (h)  $a = -0.1, b = 1, X_0 = 1$
  - (i)  $a = -0.5, b = 1, X_0 = 1$
  - (j)  $a = -1.2, b = 1, X_0 = 1$
2. W jeziorze jest aktualnie 10 000 ryb. Gdyby ich nie odławiano, populacja wzrastałaby o 15% rocznie. Rocznie odławia się jednak 2000 ryb, a ponadto śmiertelność ryb jest proporcjonalna do objętości zanieczyszczenia w jeziorze (ze współczynnikiem proporcjonalności  $k$ ). Początkowo woda jest zanieczyszczona w 5%. Każdego dnia do jeziora wpływa 1000 m<sup>3</sup> czystej wody, a wypływa 1000 m<sup>3</sup> wody zanieczyszczonej. Zapisać równania określające populację ryb  $F_n$  oraz ilość zanieczyszczenia w jeziorze  $P_n$ .
3. Załóżmy, że w ciągu każdego dnia epidemii
  - $x\%$  chorych osób umiera,
  - $y\%$  chorych osób zdrowieje i staje się odporna na chorobę,
  - $z\%$  podatnych osób zachorowuje.

Oznaczmy:

$I_n$  = liczba chorych w dniu  $n$

$S_n$  = liczba osób podatnych w dniu  $n$

$R_n$  = liczba osób odpornych w dniu  $n$

Które z poniższych opcji są zgodne z założeniami (i)–(iii)?

(a)  $I_{n+1} = I_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$

- (b)  $I_{n+1} = I_n + (x/100)I_n - (y/100)I_n - (z/100)S_n$
- (c)  $S_{n+1} = S_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$
- (d)  $R_{n+1} = R_n - (x/100)I_n - (y/100)I_n + (z/100)S_n$
- (e)  $S_{n+1} = S_n - (z/100)S_n$
- (f)  $R_{n+1} = R_n + (z/100)I_n$
- (g)  $R_{n+1} = R_n + (y/100)I_n$
- (h)  $S_{n+1} = S_n + (y/100)I_n$

4. Dwie sąsienne wyspy A i B mają populacje mew, które stale migrują pomiędzy nimi. Gdyby nie było migracji, przyrosty populacji na A i B wynosiłyby odpowiednio 5% i 3%. Oznaczmy całkowitą liczbę ptaków na A w roku  $n$  przez  $A_n$  z analogiczną notacją dla B. Załóżmy, że każdego roku ma miejsce stała migracja 1000 ptaków z A do B oraz 800 ptaków w odwrotnym kierunku. Które dwie z poniższych opcji są zgodne z tymi założeniami?

- (a)  $A_{n+1} = A_n - 1000$
- (b)  $A_{n+1} = (1.05)A_n$
- (c)  $B_{n+1} = B_n - 800$
- (d)  $B_{n+1} = (1.03)B_n$
- (e)  $A_{n+1} = (1.05)A_n - 200$
- (f)  $A_{n+1} = (1.05)A_n - 1000$
- (g)  $B_{n+1} = (1.03)B_n + 200$
- (h)  $B_{n+1} = (1.03)B_n - 800$

5. Niech

$X_n$  = suma długu kredytu mieszkaniowego po  $n$  latach

$m$  = rata miesięczna

$N$  = liczba lat potrzebnych do spłaty kredytu

$r$  = roczna stopa procentowa

- (a) Zapisać równanie różnicowe spełnione przez  $X_n$ .
- (b) Użyć arkusza kalkulacyjnego żeby pokazać, że przy stopie 11%, kredycie 50 000 zł oraz okresie spłaty 25 lat, miesięczna spłata wynosi 494.72 zł.
- (c) Pokazać, że jeżeli kredyt ma być spłacony dokładnie w  $N$  lat, miesięczna rata powinna wynosić

$$m = X_0 \frac{R - 1}{12(1 - R^{-N})}$$

6. Przypuśćmy, że przepływy z przykładu o dwóch jeziorach przedstawionego na wykładzie nie kompensują się, co oznacza że jeziora nie mają stałej objętości wody. Oznaczmy te objętości przez  $A_n$  i  $B_n$ . Zapisać odpowiednie równania różnicowe na  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $P_n$  oraz  $Q_n$  mając poniższe informacje o dziennych przepływach:

- Pierwsze jezioro: 800 m<sup>3</sup> czystej wody wpływa do jeziora  
 5 m<sup>3</sup> zanieczyszczenia dostaje się do jeziora  
 790 m<sup>3</sup> wody z jeziora wpływa do drugiego jeziora
- Drugie jezioro: 1 m<sup>3</sup> zanieczyszczenia dostaje się do jeziora  
 800 m<sup>3</sup> wody wypływa z jeziora

7. Szklanka X zawiera 20 łyżek wina, a szklanka Y — 20 łyżek czystej wody. Jedną łyżkę z X dodaje się do Y, którą się miesza. Następnie jedna łyżka mieszanki zostaje przeniesiona do X. Oznaczmy przez  $X_n$  i  $Y_n$  stężenia wina odpowiednio w szklankach X i Y po  $n$  takich zabiegach. Znaleźć
- (a) równanie różnicowe spełnione przez  $X_n$ ,
  - (b) jawne wyrażenia na  $X_n$  i  $Y_n$ ,
  - (c) do czego w końcu to doprowadzi.