Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Automatyki, Elektroniki i Elektrotechniki

Laboratorium modelowania i symulacji

Ćwiczenie 9: Równania różniczkowe — techniki analityczne

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Rozwiązać równanie
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + (1+t^2)y^3(t) = 0.$$
2. Rozwiązać równanie
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1+y(t)}{1+t}.$$
3. Rozwiązać zagadnienie początkowe
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + 3y(t) = 12, \quad y(0) = 6.$$
4. Rozwiązać zagadnienie początkowe
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) + 9y(t) = 0, \quad y(\pi) = -2. \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(\pi) = 3.$$
5. Rozwiązać zagadnienie brzegowe
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -3. \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(\pi/2) = 0.$$
6. W reakcji chemicznej $A \to B \to C$ dynamikę składników A, B i C modeluje się jako zagadnienie początkowe
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) &= -k_1A(t), & A(0) &= A_0,\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(t) &= +k_1A(t) - k_2B(t), & B(0) &= B_0,\\
\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(t) &= +k_2B(t), & C(0) &= C_0.
\end{aligned}$$
Rozwiązać ten układ równań.
7. Duże stado dzikich zwierząt żyje na obszarze, w którym opady zmieniają się okresowo z maksimum przypadającym co cztery lata. Zwierzęta żywią się roślinnością, której ilość zależy od opadów. Ocenia się, że szybkość przyrostu populacji jest proporcjonalna do ilości dostępnej żywności, oraz że maksymalny przyrost to 2% rocznie. Występuje również zjawisko emigracji 100 zwierząt rocznie. Obecna wielkość populacji to 5000 zwierząt. Potrzebna jest prognoza rozwoju populacji na najbliższe 20 lat. Zaproponować odpowiedni model w postaci równania różniczkowego zwyczajnego.

8. Szybkość ochładzania gorącego ciała w powietrzu jest w przybliżeniu proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała i temperaturą powietrza. Jeżeli temperatura powietrza wynosi $18°$, a ciało mające początkowo temperaturę $60°$ ochłodziło się do $50°$ w ciągu 3 min, jak długo będzie się ochładzać do temperatury $30°$? Jaka będzie temperatura po 10 min?

9. Przez dziurę w dnie dużego zbiornika w kształcie pionowego walca wycieka ciecz. Prędkość wycieku jest proporcjonalna do $\sqrt{y}$, gdzie: y — wysokość cieczy w zbiorniku. Znaleźć równanie różniczkowe określające y. W południe poziom cieczy wynosił 10 m. Po godzinie wynosił już 5 m. O której godzinie zbiornik będzie pusty?

10. Zbiornik w kształcie stożka o wysokości 2 m jest pełen wody, a jego promień powierzchni wynosi 1 m. Po 8 h głebokość wody wynosi jedynie 1.5 m. Zakładając, że woda paruje z szybkością proporcjonalną do powierzchni wystawionej na powietrze, określić model do przewidywania objętości wody w zbiorniku w dowolnej chwili t.

11. Szeregowy obwód LC zawierający indukcyjność $L = 1$ H oraz pojemność $C = 0.25$ F, zostaje podłączony do źródła napięcia $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, gdzie: $E_0 = 1$ V oraz $\omega^2 = 3.5$ s^2. Określić ładunek na kondensatorze w funkcji czasu.