

Analiza wielokryterialna

dr hab. inż. Krzysztof Patan, prof. PWSZ

Instytut Politechniczny
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Głogowie
`k.patan@issi.uz.zgora.pl`

Wprowadzenie

Wielokryterialny wybór wariantu – warianty oceniane są w różnych aspektach (cena, bezpieczeństwo, szkolenie, itd) w skali od 1 do 10 (najlepsza ocena)

wariant	kryt. 1	kryt. 2	kryt. 3	kryt. 4	kryt. 5
w1	1	10	10	10	10
w2	10	1	10	10	10
w3	10	10	1	10	10
w4	10	10	10	1	10
w5	10	10	10	10	1
w6	8	8	8	8	8

Optymalizacja wielokryterialna

- $x \in Q$ – decyzje dopuszczalne; wiele funkcji oceny decyzji

$$y_i = f_i(x)$$

- Model w przestrzeni decyzji

$$\max(f_1(x), \dots, f_m(x)) : x \in Q$$

- Model w przestrzeni ocen

$$\max y = (y_1, \dots, y_m) : y \in A$$

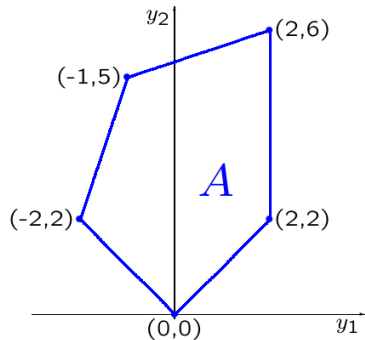
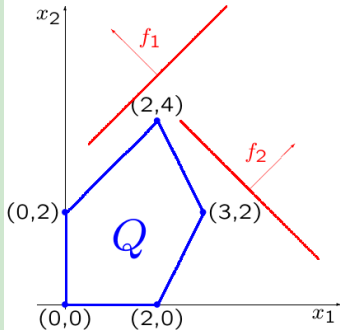
$$A = \{y \in Y : y = f(x), x \in Q\}$$

Przykład. Dwukryterialne zadanie ZPL

$$\max\{x_2 - x_1, x_1 + x_2\}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 + x_2 \leq 8$$

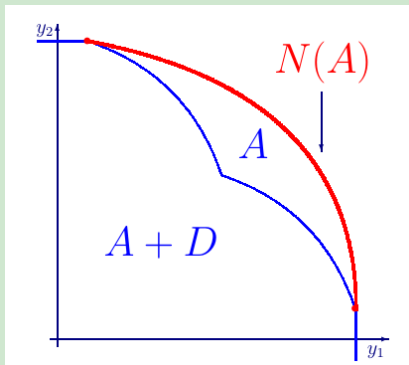
$$2x_1 - x_2 \geq 4, x_1, x_2 \geq 0$$



Przykład. Zadanie programowania kwadratowego

$$\max\{9 - x_1^2 - x_2^2, 2x_1 + 2x_2 + 1\}$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2$$



zbiór dopuszczalny D – kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$

zbiór ocen osiągalnych A – niewypukły

zbiór ocen niezdominowanych $N(A)$

- Systemy wspomagania decyzji opierają swoje działanie na modelach, które są wykorzystywane do wspomagania procesu wyboru wariantu rozwiązania
- Podział metod:
 - wielokryterialne zadania liniowe: metody generowania wierzchołków sprawnych lub wszystkich maksymalnych powierzchni sprawnych, korzystając ze szczególnych własności zadań liniowych
 - wielokryterialne zadania liniowe: metody aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych oparte o metody niesympleksowe
 - metody aproksymacji zbioru rozwiązań sprawnych zadań nieliniowych: metoda NISE, BAWD analogowe: fizyczne, graficzne
- Zbiór rozwiązań sprawnych jest zazwyczaj zbyt liczny i tylko w niektórych sytuacjach powyższe metody generują rozwiązanie zadowalające
- Metody wymagają dużych nakładów obliczeniowych
- Zawężenie zbioru rozwiązań jest możliwe po uzyskaniu dodatkowej informacji preferencyjnej od użytkownika

Podział metod analizy wielokryterialnej z dodatkową informacją preferencyjną

- **Metody deskryptywne**

zakłada się istnienie stałych, istniejących *a-priori* preferencji użytkownika zgodnych z określonym schematem lub paradygmatem podejmowania decyzji

- **Metody konstruktywne**

metody wspomagające proces uczenia się preferencji użytkownika

Metody deskryptywne

- Użytkownik wyraża swoje preferencje *a-priori*
- Metody interaktywne proste
- Metody interaktywne z modelem preferencji

Metody konstruktywne

- Metoda punktu odniesienia
- Metoda satysfakcjonujących współczynników wymiany
- Interaktywna metoda wizualna
- Metoda zawężania stożka z wizualną interakcją

Relacja dominacji

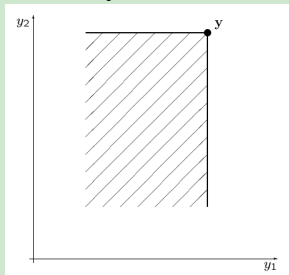
- Mówimy, że wektor ocen $y' \in Y$ (racjonalnie) dominuje $y'' \in Y$ (y'' jest (racjonalnie) dominowany przez y' wtedy i tylko wtedy, gdy $y' \succ y''$ dla wszystkich racjonalnych relacji preferencji
- Jeżeli wektor ocen y'' jest (racjonalnie) dominowany przez y' , to może on być wyeliminowany z poszukiwań, ponieważ wszyscy racjonalni decydenci preferują y' w stosunku do y''

Niezdominowane wektory ocen

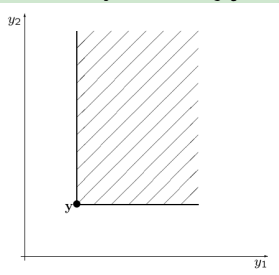
- Wektor ocen $\mathbf{y} \in A$ nazywamy (racjonalnie) niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{y}' \in A$ taki, że $\mathbf{y}$ jest dominowany przez $\mathbf{y}'$
- Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem niezdominowanym wtedy tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{y} \in A$ istnieje racjonalna relacja preferencji $\succeq$ taka, że nie zachodzi $\mathbf{y} \succ \mathbf{y}^0$
- Wystarczy wybierać wśród niezdominowanych wektorów ocen
- Wektor ocen $\mathbf{y}^0 \in A$ jest wektorem niezdominowanym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\mathbf{y} \in A$ taki, że $\mathbf{y} \geq \mathbf{y}^0$

Przykład

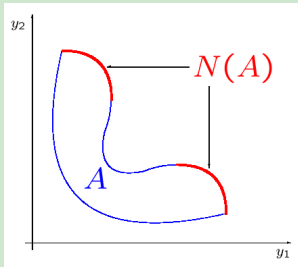
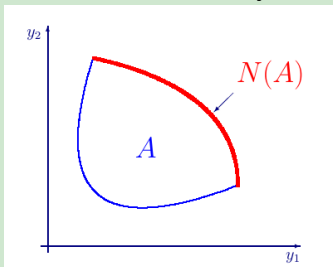
wektory dominowane



wektory dominujące



wektory niezdominowane



Rozwiązanie efektywne, Pareto-optymalne

- Wektor dopuszczalny $x \in Q$ nazywamy rozwiązaniem efektywnym (Pareto-optymalnym, sprawnym) zadania wielokryterialnego wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu wektor ocen $y = f(x)$ jest wektorem niezdominowanym
- Wektor dopuszczalny $x^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójna, racjonalna relacja preferencji $\succeq$ taka, że $f(x^0) \succeq f(x)$ dla każdego $x \in Q$
- Wektor dopuszczalny $x^0 \in Q$ jest rozwiązaniem efektywnym zadania wielokryterialnego wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $x \in Q$ taki, że $f(x) \geq f(x^0)$

Rozwiązanie optymalne, a efektywne

- *Optymalizacja jednokryterialna*

$$\max f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q$$

Wszystkie rozwiązania optymalne dają ten sam wynik

$$\mathbf{y}^* = f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}'')$$

Cel: Wyznaczyć dowolne rozwiązanie optymalne

- *Optymalizacja wielokryterialna*

$$\max \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\}$$

Różne rozwiązania efektywne generują wzajemnie porównywalne wektory ocen

Cel: Wyznaczyć wszystkie rozwiązania efektywne

Wektor utopii

- Macierz realizacji celów – tablica wartości wszystkich funkcji oceny otrzymanych podczas rozwiązywania poszczególnych problemów jednokryterialnych

$$\mathbf{K} = (k_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, m, k_{ij} = f_i(\mathbf{x}_j)$$

gdzie $\mathbf{x}_j$ – rozwiązanie optymalne jednokryterialnego zadania

$$\max f_j(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q$$

- Wektor utopii $\mathbf{y}_u$ – najlepsze wartości każdej funkcji oceny osobno, czyli

$$y_i^u = k_{ii} = f_i(\mathbf{x}_i)$$

- Górne ograniczenie wszystkich osiągalnych wektorów ocen, tzn.

$$\mathbf{y}^u \geq \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in A$$

- Jest on zwykle nieosiągalny
- Gdyby istniał wektor dopuszczalny $\mathbf{x}^0 \in Q$ taki, że $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^u$, to $\mathbf{x}^0$ byłby rozwiązaniem optymalnym zadania wielokryterialnego

Wektor nadiru

- Wektor nadiru $\mathbf{y}^n$ – najgorsze wartości dla każdej funkcji oceny odnotowane podczas poszczególnych optymalizacji jednokryterialnych:

$$y_i^n = \min k_{ij} \quad j = 1, \dots, m \Rightarrow y_i^n = \min f_i(x_j) \quad j = 1, \dots, m$$

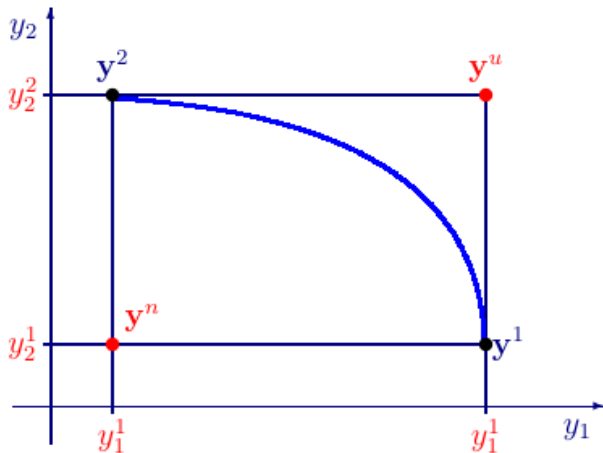
- Składowe wektora nadiru nie muszą wyrażać najgorszych wartości funkcji oceny na całym zbiorze rozwiązań efektywnych
- W przypadku dwóch ocen, wektor nadiru stanowi dolne ograniczenie wszystkich niezdominowanych wektorów ocen

$$\mathbf{y}^n \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^u \quad \forall \mathbf{y} \in N(A)$$

gdzie $N(A)$ – zbiór ocen niezdominowanych

- W ogólnym przypadku (dla liczby ocen większej od 2) nie można zagwarantować, że $\mathbf{y} \leq \mathbf{y}$ dla każdego niezdominowanego wektora ocen $\mathbf{y} \in A$

Wektory utopii i nadiru



pierwsza ocena

$$\mathbf{y}^1 = [y_1^1 \ y_2^1]$$

druga ocena

$$\mathbf{y}^2 = [y_1^2 \ y_2^2]$$

wektor utopii

$$\mathbf{y}^u = [y_1^1 \ y_2^2]$$

wektor nadiru

$$\mathbf{y}^n = [y_1^2 \ y_2^1]$$

Przykład

Przeanalizujemy sześć wektorów ocen, gdzie wszystkie są niezdominowane:

$$[10 \ 3 \ 3] \quad [3 \ 10 \ 3] \quad [3 \ 3 \ 10] \quad [1 \ 8 \ 8] \quad [8 \ 1 \ 8] \quad [8 \ 8 \ 1]$$

Macierz realizacji celów

kryterium 1	10	3	3
kryterium 2	3	10	3
kryterium 3	3	3	10

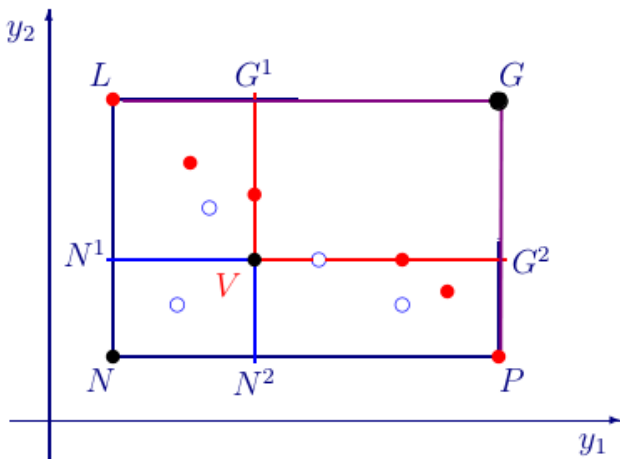
wektor utopii – $[10 \ 10 \ 10]$

wektor nadir – $[3 \ 3 \ 3]$

faktyczne dolne ograniczenie ocen niezdominowanych – $[1 \ 1 \ 1]$

Metoda NISE

- NISE (ang. NonInferior Set Estimation)
- Metoda iteracyjna pozwalająca na coraz dokładniejsze szacowanie całego zbioru wektorów niezdominowanych
- Szacowanie zbioru niezdominowanych wektorów ocen za pomocą sumy coraz mniejszych prostokątów
- W przypadku wypukłych zadań dwukryterialnych pozwala na precyzyjne szacowanie za pomocą sumy coraz mniejszych trójkątów



G – wektor utopii, N – wektor nadiru
 L, P – niezdominowane wektory ocen

- W celu uściślenia oszacowania przeprowadza się minimalizację odległości od punktu G mierzonej w sensie ważonego maksimum

$$d(y) = \max\{w_1(g_1 - y_1), w_2(g_2 - y_2)\}$$

z wagami odwrotnie proporcjonalnymi do odpowiednich boków prostokąta

$$b = g_1 - l_1 \text{ i } h = g_2 - p_2 \text{ czyli } w_1 = \frac{1}{b} \text{ i } w_2 = \frac{1}{h}$$

- Zauważmy, że

$$d(L) = d(N) = d(P) = 1$$

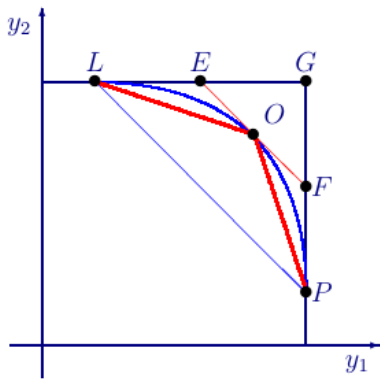
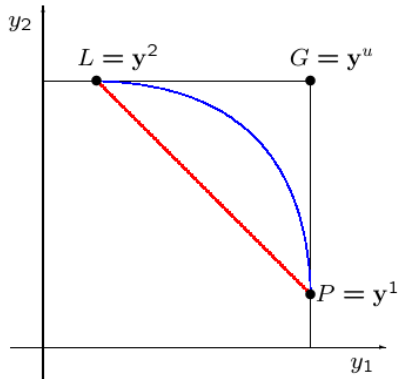
- Minimalizacja odległości wymaga rozwiązania zadania

$$\min\{z : bz \geq g_1 - f_1(\mathbf{x}), hz \geq g_2 - f_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in Q\}$$

- Niech z^0 oznacza wartość optymalną tego zadania
- Określamy $V = (v_1, v_2)$ taki, że $v_1 = g_1 - bz^0$ i $v_2 = g_2 - hz^0$
- Wszystkie wektory ocen o obu współrzędnych mniejszych od współrzędnych V są zdominowane
- Brak osiągalnych wektorów o obu współrzędnych większych od współrzędnych V
- **Wniosek.** Wszystkie niezdominowane wektory ocen znajdują się w sumie dwóch prostokątów: N^1VG^1L i VG^2PN^2
- W kolejnej iteracji zawężamy obszar poszukiwań wybierając większy z prostokątów N^1VG^1L i VG^2PN^2 i powtarzając całą analizę

Metoda NISE – przypadek wypukły

- Coraz dokładniejsze przybliżanie zbioru niezdominowanego przez dzielenie trójkąta na dwa mniejsze
- Początkowy trójkąt obejmuje cały zbiór niezdominowany

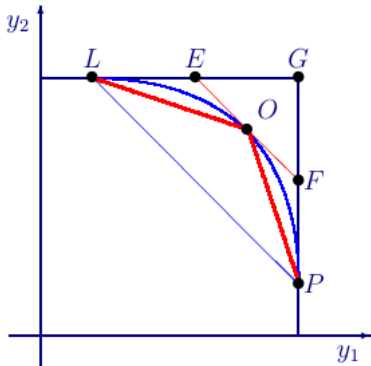


- Początkowe przybliżenie zbioru niezdominowanego – odcinek LP
- Trójkąt LPG – oszacowanie dokładności przybliżenia
- Uściślenie oszacowania – problem optymalizacji odległości rozwiązania od punktu G (ważone maksimum)

$$\max\{w_1y_1, w_2y_2 : y_1 \leq f_1(x), y_2 \leq f_2(x), x \in Q\}$$

z wagami $w_1 = l_2 - p_2$ i $w_2 = -p_1 - l_1$

- Niech $O = (y_1^0, y_2^0)$ oznacza rozwiązanie optymalne tego zadania



- Wszystkie niezdominowane wektory ocen zawarte w ΔLPG muszą się znaleźć między podstawą trójkąta, a warstwicą optymalną zawierającą punkt O
- Wszystkie niezdominowane wektory ocen zawarte w ΔLPG muszą się znaleźć w obszarze trapezu $LPFE$
- Eliminując wektory ocen dominowane przez odcinki LO i OP otrzymuje się oszacowanie niezdominowanych wektorów ocen w sumie dwóch trójkątów LOE i PFO
- Uzyskujemy nowe przybliżenie zbioru niezdominowanego w postaci łamanej LOP
- Oszacowanie dokładności – $\Delta LEO + \Delta PFO$
- Kontynuujemy przybliżanie wybierając trójkąt o większej wysokości i powtarzając procedurę

Skalaryzacja

Definicja

Skalaryzacją zadania optymalizacji wielokryterialnej nazywa się zadanie optymalizacji jednokryterialnej postaci

$$\max\{s(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in Q\}$$

gdzie $s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją skalaryzującą

- Maksymalizacja funkcji skalaryzującej definiuje relację preferencji

$$\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \Rightarrow s(\mathbf{y}') \succeq s(\mathbf{y}'')$$

- Jeżeli funkcja skalaryzująca jest ściśle rosnąca po współrzędnych, to jej relacja preferencji jest ściśle monotoniczna i rozwiązanie optymalne skalaryzacji jest rozwiązaniem efektywnym zadania optymalizacji wielokryterialnej

Skalaryzacja sumacyjna

- Suma indywidualnych ocen

$$s(\mathbf{y}) = \sum_i y_i$$

- Rozwiązanie optymalne zadania skalaryzacji sumacyjnej

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Skalaryzacja ważona

- Ważona suma ocen

$$s(\mathbf{y}) = \sum_i w_i y_i$$

gdzie wagi w_i są liczbami dodatnimi

- Zwykle przyjmuje się wagi znormalizowane ($\sum_i w_i = 1$)
- Rozwiązanie optymalne zadania skalaryzacji sumacyjnej

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Skalaryzacja sumacyjna

- Suma indywidualnych ocen

$$s(\mathbf{y}) = \sum_i y_i$$

- Rozwiązanie optymalne zadania skalaryzacji sumacyjnej

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Skalaryzacja ważona

- Ważona suma ocen

$$s(\mathbf{y}) = \sum_i w_i y_i$$

gdzie wagi w_i są liczbami dodatnimi

- Zwykle przyjmuje się wagi znormalizowane ($\sum_i w_i = 1$)
- Rozwiązanie optymalne zadania skalaryzacji sumacyjnej

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Skalaryzacja maksyminowa

- Maksymalizacja najgorszej oceny

$$s(\mathbf{y}) = \min_i y_i$$

- Zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji maksyminowej

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Maksiminowa skalaryzacja ważona

- Maksymalizacja najgorszej ważonej oceny

$$s(\mathbf{y}) = \min_i w_i y_i$$

- Zbiór rozwiązań optymalnych maksiminowej skalaryzacji ważonej

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,m} w_i f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Skalaryzacja maksyminowa

- Maksymalizacja najgorszej oceny

$$s(\mathbf{y}) = \min_i y_i$$

- Zbiór rozwiązań optymalnych skalaryzacji maksyminowej

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,m} f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Maksiminowa skalaryzacja ważona

- Maksymalizacja najgorszej ważonej oceny

$$s(\mathbf{y}) = \min_i w_i y_i$$

- Zbiór rozwiązań optymalnych maksiminowej skalaryzacji ważonej

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,m} w_i f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q \right\}$$

Przykład

Rozważmy problem wielokryterialnego wyboru wariantu. Każdy wariant został oceniony w pięciu różnych aspektach reprezentowanych przez kryteria o skali od 1 (najgorsza ocena) do 10 (najlepsza ocena)

wariant	kryt. 1	kryt. 2	kryt. 3	kryt. 4	kryt. 5
w1	1	10	10	10	10
w2	10	1	10	10	10
w3	10	10	1	10	10
w4	10	10	10	1	10
w5	10	10	10	10	1
w6	8	8	8	8	8

Wszystkie wektory ocen są niezdominowane i mogą zostać uznane za najlepsze przy odpowiednich preferencjach użytkownika

Przykład

Rozważmy problem wielokryterialnego wyboru wariantu. Każdy wariant został oceniony w pięciu różnych aspektach reprezentowanych przez kryteria o skali od 1 (najgorsza ocena) do 10 (najlepsza ocena)

wariant	kryt. 1	kryt. 2	kryt. 3	kryt. 4	kryt. 5
w1	1	10	10	10	10
w2	10	1	10	10	10
w3	10	10	1	10	10
w4	10	10	10	1	10
w5	10	10	10	10	1
w6	8	8	8	8	8

Wszystkie wektory ocen są niezdominowane i mogą zostać uznane za najlepsze przy odpowiednich preferencjach użytkownika

Skalaryzacja sumacyjna

sumując oceny uzyskujemy

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^5 f_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \{w1, w2, w3, w4, w5, w6\} \right\}$$

$$\max\{41, 41, 41, 41, 41, 40\} = 41$$

taki samwynik uzyskujemy dla wariantów w1, w2, w3, w4 i w5

nie można zdecydować który wariant jest najlepszy

Skalaryzacja ważona

założmy następującą ważność kryteriów f_1 –10%, f_2 –20%, f_3 –25%, f_4 –30%, f_5 –15%

stąd znormalizowane wagi: $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.2$, $w_3 = 0.25$, $w_4 = 0.3$ i $w_5 = 0.15$

stosując skalaryzację ważoną otrzymujemy

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^5 w_i f_i(x) : x \in \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\} \right\}$$

$$\max\{9.1, 8.2, 7.75, 8.65, 8\} = 9.1$$

najlepszy wynik uzyskał wariant w1

UWAGA. Bez względu na rozkład wartości wag wariant w6 nigdy nie zostanie wskazany!

Skalaryzacja maksyminowa

obliczamy najgorsze oceny dla każdego wariantu

$$\begin{aligned}\min_{i=1,\dots,5} f_i(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \{w1, w2, w3, w4, w5, w6\} = \\ = \{1, 1, 1, 1, 1, 8\}\end{aligned}$$

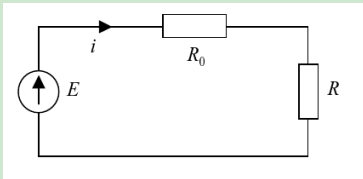
obliczamy najlepsze rozwiązanie spośród najgorszych

$$\max\{1, 1, 1, 1, 1, 8\} = 8$$

najlepszy wynik uzyskał wariant w6

Przykład. Dzielnik napięcia

Rozważmy dzielnik napięcia, gdzie napięcie źródła E i rezystancja $R_0 > 0$ są stałe, zaś rezystancja obciążenia R może być dobierana w zakresie $[0, \infty)$. Jak dobrać wartość R ?



zmienna decyzyjna $u = \frac{R}{R_0}$

przestrzeń decyzyjna $U = \mathbb{R}$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych $D = [0, \infty)$

Miary jakości

- ❶ Moc P wydzielana na oporze

$$P = \frac{E^2 u}{R_0(1+u)^2}$$

- ❷ Sprawność η

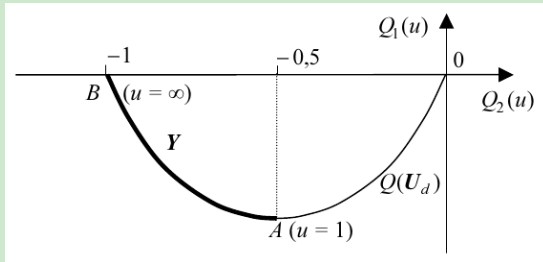
$$\eta = \frac{u}{1+u}$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$Q_1(u) = -P, \quad Q_2 = -\eta, \quad Q = [Q_1 \ Q_2]$$

Podstawiając Q_2 do Q_1 otrzymujemy

$$Q_1(u) = \frac{E^2}{R_0} Q_2(u)(1 + Q_2(u))$$



- zmieniając u od 0 do ∞ , Q_1 zmienia się od 0 do -1 , Q_2 od 0 do -1
- zbiór ocen osiągalnych – $Y \Rightarrow$ zakres zmienności zmiennej decyzyjnej $U_Y = [1, \infty)$
- jeżeli energia jest tania wybierzemy R niewiele większe od R_0 (blisko punktu A)
- jeżeli energia jest droga i bardziej zależy nam na sprawności wybierzemy pracę blisko punktu B (duża wartość u)