Algebra liniowa I. Lista 1

Zadanie 1.

a) Mówimy, że dwa odcinki są *współmierne* jeśli istnieje trzeci, który odkłada się w każdym z tych dwóch całkowitą liczbę razy bez reszty. Pitagorejczycy: Wykazać, że bok i przekątna kwadratu nie są współmierne.

b) W terminologii współczesnej: Wykazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli m jest liczbą naturalną, w której rozkładzie na czynniki pierwsze przynajmniej jedna liczba pierwsza występuje z wykładnikiem nieparzystym, to liczba $\sqrt{m}$ jest niewymierna.

Zadanie 3.

a) Wykazać, że jeśli m, n, p to liczby całkowite oraz $m\sqrt{3}+n\sqrt{5}+p\sqrt{15} = 0$, to $m = n = p = 0$. Czy teza pozostałaby prawdziwa, gdyby przyjąć, że m, n, p są wymierne?

b) Wywnioskować z *a*), że jeśli a, b, c, d są wymierne i $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15} = 0$, to $a = b = c = d = 0$

c) Wskazać wielomian o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. Czy można wskazać taki wielomian, by miał on stopień $\leqslant 3$.

Zadanie 4. Wykazać, że istnieje para liczb niewymiernych dodatnich a, b, że a^b jest liczbą wymierną.

Zadanie 5.* Wykazać, że suma i iloczyn dwu liczb algebraicznych są liczbami algebraicznymi. (Proszę jedynie zapamiętać zadanie. Rozwiązanie pod koniec semestru.)

Zadanie 6. Wykazać, ze istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 7.

a) Mówimy, że liczba całkowita dodatnia różna od 1 jest *bezkwadratowa* jeśli nie daje się rozłożyć na iloczyn liczb całkowitych postaci a^2b , gdzie $a > 1$. Wykazać, że jeśli p, q, r są liczbami wymiernymi, zaś c, d są różnymi liczbami bezkwadratowymi, to

$$p + q\sqrt{c} + r\sqrt{d} = 0, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p = q = r = 0.$$

b) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele ciał liczbowych.

Zadanie 8. Niech $\max(a, b)$ oznacza tę z liczb a, b, która nie jest mniejsza od drugiej, zaś $\min(a, b)$ oznacza tę, która nie jest większa. Wykazać następujące zależności:

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \qquad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Czy operacje max, min są łączne? Czy max jest rozdzielna względem min i odwrotnie? Czy mają one elementy neutralne?

Zadanie 9. Uzasadnić, że max, min są działaniami w każdym przedziale $I = [m, M]$. Wykazać, że jako działania w I mają elementy neutralne.

Zadanie 10. Niech będą dane dwa niepuste zbiory X i Y. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $f\colon X \to Y$. Niech $\circ$ będzie działaniem w X. Określmy działanie $\bullet$ w Y wzorem

$$x \bullet y = f(f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)).$$

Wykazać, że $\circ$ jest łączne wtedy i tylko wtedy, gdy $\bullet$ jest łączne. Podobnie, jeśli jedno z nich ma element neutralny to i drugie. (**Uwaga.** O działaniach $\circ$ i $\bullet$ mówimy, że są *sprzężone*.)

Zadanie 11. Określmy w $(0, +\infty)$ działanie $\odot$ *dodawania hiperbolicznego*:

$$x \odot y = \frac{xy}{x + y}.$$

oraz działanie $+_2$ *dodawania Pitagorasa*:

$$x +_2 y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wykazać, że oba działania są sprzężone ze zwykłym dodawaniem $+$ w $(0, +\infty)$. Czy dodawanie hiperboliczne jest rozdzielne względem zwykłego dodawania?

Zadanie 12. (Na marginesie poprzedniego zadania.) W spadku znalazły się trzy kwadratowe chusty o różnej wielkości. Ich wartość artystyczna jest wątpliwa, ale utkano je ze złotych nici. Spadkobierca może wziąć dwie mniejsze lub największą. Podpowiedz metodę dokonania właściwego wyboru. Pomiary chust są niedozwolone. Czy podobne zadanie da się rozwiązać, gdy chusty mają kształt kół.

Zadania rozrywkowe z broszurki Władimira Igorewicza Arnolda:
Zadania dla dzieci od 5 do 15 lat

1. Z beczki wina przelano łyżkę do niepełnej szklanki z herbatą. Potem przelano łyżkę otrzymanej (niejednorodnej) mieszaniny ze szklanki do beczki. Gdzie jest więcej obcej cieczy w beczce, czy w szklance?

2. Dachówka waży funt i pół dachówki. Ile waży dachówka?

3. Z A do B i z B do A o świcie wyszły sobie na przeciw po tej samej drodze dwie staruszki. Spotkały się w południe, ale nie zatrzymały się tylko dalej podążyły każda ze swoją prędkością. Pierwsza dotarła do celu o 4 po południu a druga o 9 wieczorem. O której tego dnia świtało?

4. W Ameryce Południowej znajduje się okrągłe jezioro, gdzie każdego roku pierwszego czerwca podnosi się z dna pąk kwiatu królowej Wiktorii. Jego płatki kładą się na wodzie jak u lilii wodnej. Każdego dnia powierzchnia kwiatu podwaja się, aż 1 lipca zakrywa on całe jezioro. Jakiego dnia kwiat pokrywał połowę powierzchni jeziora?

Komentarz: Arnold twierdzi, że najlepiej takie zadania rozwiązują dzieci, gorzej – studenci, a najgorzej – profesorowie.

CDN