Algebra liniowa I. Lista 3

Zadanie 1. Obliczyć $\sqrt{3-4\,\mathrm{i}}$, $\sqrt{-3-4\,\mathrm{i}}$, $\sqrt{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Zadanie 2. Rozwiązać równania $z^2+4z-1=0$, $z^4-3z+4=0$.

Zadanie 3. Wykazać wzór de Moivre'a: $(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$.

Zadanie 4. Obliczyć $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{\mathrm{i}}$, $\sqrt[6]{16}$.

Zadanie 5. Wykazać, że dla każdej pary liczb zespolonych z, t zachodzi tak zwana nierówność trójkąta: $|z+t|\leqslant|z|+|t|$. W jakich przypadkach nierówność ta staje się równością?

Zadanie 6. Dano dwie liczby dodatnie $r<R$ oraz liczbę zespoloną z_0. Jakim tworem geometrycznym jest zbiór rozwiązań nierówności

$$r<|z-z_0|<R\ ?$$

Zadanie 7. Dowieść, że jeśli $x_1,\dots,x_n$ są różnymi pierwiastkami równania, $z^n=1$, to

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\qquad x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n-1}.$$

Zadanie 8. Pierwiastkiem pierwotnym z jedności stopnia n nazywamy każdą liczbę zesploną ε o tej własności, że jest ona rozwiązaniem równania $z^n=1$ i każde inne rozwiązanie tego równania jest pewną potęgą całkowitą liczby ε.

Wyznaczyć w postaci trygonometrycznej i przedstawić graficznie wszystkie pierwiastki z jedności stopnia 10. Specjalnie zamarkować te, które są pierwiastkami pierwotnymi.

Zadanie 9. Wykazać, że zbiór wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n z mnożeniem liczb zespolonych jako działaniem tworzy grupę.

Zadanie 10. Jaka linię przedstawia równanie $\operatorname{Re} z^2=r$, r jest liczbą rzeczywistą.

Zadania rozrywkowe z broszurki Władimira Igorewicza Arnolda:
Zadania dla dzieci od 5 do 15 lat. CD

1. Myśliwy przeszedł od swojego namiotu 10 km na południe, skręcił na wschód i przeszedł w tym kierunku jeszcze 10 km, zabił niedźwiedzia, skręcił na północ i przeszedłszy jeszcze 10 km znalazł się przy namiocie. Jakiego koloru był niedźwiedź?

2. Liczby królików (liczby Fibonacciego) tworzą ciąg $a_1 = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, w którym $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla wszelkich $n = 1, 2, \ldots$. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb a_{100} i a_{99}.

3. W węzłach kratkowanego papieru wybrano cztery wierzchołki równoległoboku. Okazało się, że żaden inny węzeł nie leży ani wewnątrz ani na bokach równoległoboku. Wykazać, że pole równoległoboku jest równe jednej kratce.

4. Od sześcianu sumy kilku liczb całkowitych odjęto sumę ich sześcianów. Czy prawdą jest, że otrzymana liczba dzieli się przez 3?