Algebra liniowa I. Lista 4

Zadanie 1. Niech $U = \{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ – zbiór jednostek urojonych ciała kwaternionów $\mathbb{H}$.

1. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $x \cdot y$, gdzie $x, y \in U$, wychodząc od tożsamości $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{i}\,\mathrm{j}\,\mathrm{k} = -1$.

2. Każdy kwaternion $q = a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ możemy przedstawić w postaci pary liczb zespolonych:

$$q = u_1 + u_2\,\mathrm{j}, \quad \text{gdzie } u_1 = a + b\,\mathrm{i},\ u_2 = c + d\,\mathrm{i}.$$

   Niech $r = v_1 + v_2\,\mathrm{j}$, będzie przedstawieniem kwaternionu r w postaci pary liczb zespolonych. Wykazać, że zachodzi wzór

$$q \cdot r = (u_1 v_1 - u_2 \bar{v}_2) + (u_1 v_2 + u_2 \bar{v}_1)\,\mathrm{j}\,.$$

   (Kreska nad symbolem liczby zespolonej oznacza jej sprzężenie.)

3. Opisać wszystkie kwaterniony q spełniające równanie $q^2 = -1$. Wywnioskować, że zbiór rozwiązań tego równania jest nieskończony.

4. Wyznaczyć wszystkie kwaterniony q spełniające równanie $q^2 = 1$.

Zadanie 2. Wyznaczyć σ^2, $\sigma\tau$ oraz $\tau\sigma$ dla następujących par permutacji:

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

2. $\sigma = 32105476$, $\tau = 20317645$;

3. $\sigma = \begin{pmatrix} \# & \& & * & @ & \heartsuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \heartsuit & @ & \spadesuit & * & \diamondsuit & \# & \& \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \# & \& & * & @ & \heartsuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \heartsuit & \# & * & \diamondsuit & \& & @ \end{pmatrix}.$

Zadanie 3. Dla permutacji σ, τ z poprzedniego zadania,

1. znaleźć ich rozkłady na rozłączne cykle;

2. przedstawić je w postaci złożenia transpozycji;

3. wyznaczyć ich znaki;

4. znaleźć najmniejszą liczbę k, że $\sigma^k = \varepsilon$.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $n \geqslant 2$, to liczność S_n jest równa $n!$, zaś liczność A_n jest równa $\frac{1}{2}n!$.

Zadanie 5. * Nośnikiem permutacji $\tau \in S_X$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp} \tau = \{x \in X \colon \tau(x) \neq x\}.$$

Ile jest permutacji $\sigma \in S_n$ o tej własności, że $\operatorname{supp} \sigma = [n] := \{1, \ldots n\}$?

Zadanie 6. Od ciągu symboli $\# \& * @ \heartsuit \spadesuit \diamondsuit$ przechodzimy do ciągu $\heartsuit \spadesuit @ * \diamondsuit \# \&$ zamieniając w każdym kroku dwa symbole miejscami. Wyznaczyć możliwie najmniejszą liczbę kroków niezbędnych do takiego przejścia. Czy permutacja przeprowadzająca elementy pierwszego ciągu na elementy drugiego jest parzysta?

Zadanie 7. Niech S będzie dowolną orientacją na zbiorze skończonym X zaś $\sigma \in S_X$ niech będzie przestawieniem. Wykazać, że

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1.$$

(Wskazówka: Jeśli $\sigma = (xy)$ i $z \in X \setminus \{x, y\}$, to albo oba zbiory $\{z, x\}, \{z, y\}$ należą do $\bar{\sigma}$ albo żaden.)

Zadanie 8. (o permutacjach zbioru nieskończonego) Niech G oznacza zbiór wszystkich tych permutacji τ zbioru $\mathbb{Z}$, że $\tau[\mathbb{N}] \triangle \mathbb{N}$ (różnica symetryczna) jest zbiorem skończonym. Wykazać, że G jest grupą ze składaniem permutacji jako operacją.

Zadanie 9. Podzbiór A grupy G nazywamy jej *zbiorem generatorów*, jeśli każdy element $g \in G$ daje się przedstawić w postaci $g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest dowolnym, skończonym ciągiem elementów zbioru A, zaś $k_1, k_2, \ldots, k_n$ są liczbami całkowitymi. Sprawdzić, czy A jest zbiorem generatorów grupy G w następujących przypadkach:

1. $G = S_n$, $n \geqslant 2$, oraz $A = \{(xy) \colon x, y \in [n]\}$;
2. $G = S_n$, $n \geqslant 4$, oraz $A = \{(uvwx) \colon u, v, w, x \in [n]\}$;
3. $G = A_n := \{\tau \in S_n \colon \operatorname{sgn}(\tau) = 1\}$, $n \geqslant 4$, oraz $A = \{(uv)(xy) \colon u, v, x, y \in [n]\}$;
4. $G = A_n := \{\tau \in S_n \colon \operatorname{sgn}(\tau) = 1\}$, $n \geqslant 4$, oraz $A = \{(uvx) \colon u, v, x \in [n]\}$.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli $\kappa \in S_n$ jest cyklem długości k to dla każdej $\tau \in S_n$, permutacja $\tau^{-1}\kappa\tau$ jest także cyklem długości k.

Zadanie 11. Niech G oznacza dowolna grupę. Niech $h \in G$. Wykazać, że odwzorowanie $f\colon G \to G$ dane wzorem $f(g) = h^{-1}gh$ jest automorfizmem grupy G. (Automorfizmy takiej postaci nazywamy *wewnętrznymi*).

Zadania rozrywkowe z broszurki Władimira Igorewicza Arnolda:
Zadania dla dzieci od 5 do 15 lat. CD

1. Uczeń Janek rozwiązywał zadanie o dwu chłopcach, którzy jeszcze nie chodzą do szkoły. Należało znaleźć wiek każdego (liczby całkowite) a dany był iloczyn tych liczb. Janek stwierdził, że zadanie jest nierozwiązywalne. Nauczyciel pochwalił go za odpowiedź i dodał, że starszy ma na imię Piotrek. Wtedy Janek natychmiast znalazł rozwiązanie. Znajdź i ty.

2. Na ile sposobów można rozłożyć 64 na 10 składników (całkowitych $\geqslant 1$) jeśli największy z nich jest równy 12. (Rozkłady różniące się tylko kolejnością składników uważa się za równe.)

3. Na bokach trójkąta ABC po zewnętrznej ich stronie zbudowano trójkąty równoboczne. Wykazać, że ich środki znowu tworzą trójkąt równoboczny.

4. Naszkicować ciało, którego widoki z góry i z przodu narysowano poniżej.