Wykład 2

Izomorfizm ciał

Niech $p-$ liczba pierwsza. Niech k oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą i niech $X=\{k,k+1,\ldots,k+p-1\}$. Określmy dodawanie $\oplus_k$ w X i mnożenie $\odot_k$ w X wzorami:

$$x\oplus_k y=[(x-k)\oplus(y-k)]+k,\quad x\odot_k y=[(x-k)\odot(y-k)]+k.$$

Można sprawdzić, że X jest ciałem p-elementowym, tak jak $\mathbb{F}_p$, z elementem neutralnym dodawania k oraz możenia $k+1$. Ustalmy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami $\mathbb{Z}_p$ i X:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & p-1\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow\\ k & k+1 & k+2 & \ldots & k+(p-1)\end{array}$$

Zauważmy, że jeżeli $a,b\in\mathbb{F}_p$ zaś $a',b'\in\mathbb{X}$ oraz a odpowiada a' (tzn. $a'=a-k$) zaś b odpowiada b', to także $a\oplus b$ odpowiada $a'\oplus_k b'$ zaś $a\odot b$ odpowiada $a'\odot_k b'$. Możemy powiedzieć, że ciała $\mathbb{F}_p$ i X są algebraicznie identyczne. , Są jedynie, mówiąc nieformalnie, *zrobione z innego materiału*.

Definicja 1. Ciało $\mathbb{F}$ nazwiemy *izomorficznym* z ciałem $\mathbb{G}$, jeśli istnieje odwzorowanie $\varphi\colon\mathbb{F}\to\mathbb{G}$ o następujących własnościach:

1. φ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami obu ciał; tzn. jest *różnowartościowe* i *na*;
2. $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, dla wszelkich $x,y\in\mathbb{F}$;
3. $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$, dla wszelkich $x,y\in\mathbb{F}$.

Odwzorowanie φ nazywamy *izomorfizmem* ciał $\mathbb{F}$ i $\mathbb{G}$. O ciałach tych mówimy także, że są izomorficzne.

Zadanie 1. Jeśli φ jest izomorfizmem ciał $\mathbb{F}$ i $\mathbb{G}$, to $\varphi(0)=0$ i $\varphi(1)=1$.

Rozwiązanie. Z warunku 2 wynika, że

$$\varphi(0)=\varphi(0+0)=\varphi(0)+\varphi(0).$$

Po odjęciu $\varphi(0)$ od obu stron otrzymamy $0=\varphi(0)$. Ponieważ odwzorowanie φ jest różnowartościowe, więc $\varphi(1)\neq 0$. Powtórnie z warunku 2.

$$\varphi(1)=\varphi(1\cdot 1)=\varphi(1)\cdot\varphi(1).$$

W wyniku dzielenia obu stron przez $\varphi(1)$ otrzymamy $1=\varphi(1)$. $\square$

Definicja 2. *Automorfizmem* ciała $\mathbb{F}$ nazywamy każdy izomorfizm $\varphi\colon\mathbb{F}\to\mathbb{F}$.

Zadanie 2. Określmy odwzorowanie $\varphi\colon\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\to\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ wzorem:

$$\varphi(a+b\sqrt{5})=a-b\sqrt{5};\quad \text{dla wszelkich wymiernych } a,b$$

Sprawdzić, że φ jest automorfizmem ciała $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Wykazać, że jest to jedyny automorfizm, który nie jest *identycznościowy*. (Automorfizm identycznościowy odwzorowuje każdy element ciała na niego samego).

Rozwiązanie.

Charakterystyka ciała.

Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem oraz niech 1 będzie jedynką tego ciała, zaś 0 jego zerem. Mamy dwie możliwości:

1. $n \times 1 \neq 0$, dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$; (symbol $n \times 1$ oznacza sumę n jedynek)
2. $n \times 1 = 0$, dla pewnej liczby naturalnej n.

Jeżeli zachodzi pierwsza możliwość, to mówimy, że ciało ma *charakterystykę* 0 i piszemy $\chi(\mathbb{F}) = 0$. Jeśli druga, to najmniejszą liczbę naturalną m spośród tych n, dla których $n \times 1 = 0$ nazywamy *charakterystyką* ciała $\mathbb{F}$. Piszemy wtedy $\chi(\mathbb{F}) = m$.

Komentarze.

1. Oczywiście ciała liczbowe, a także ciało funkcji wymiernych mają charakterystykę 0, zaś $\mathbb{F}_p$ ma charakterystykę p.
2. Jeśli ciało ma charakterystkę 0, to wszystkie elementy $n \times 1$, $n \in \mathbb{N}$, są różne między sobą, więc takie ciało musi mieć nieskończenie wiele elementów.

Twierdzenie 1. Jeżeli $\chi(\mathbb{F}) \neq 0$, to $\chi(\mathbb{F})$ jest liczbą pierwszą.

Lemat 2.

1. Jeżeli x jest elementem ciała $\mathbb{F}$, to $x \cdot 0 = 0$
2. Jeżeli x, y są niezerowymi elementami ciała $\mathbb{F}$, to $x \cdot y$ jest także niezerowym elementem tego ciała.

Dowód. ad. 1. Mamy

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Wystarczy teraz odjąć od obu stron $x \cdot 0$.

ad. 2. Przypuśćmy, że $xy = 0$, Wtedy w oparciu o 1.

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = (y^{-1}x^{-1}) \cdot 0 = 0,$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} (y^{-1}x^{-1})(xy) &= y^{-1}((x^{-1}x)y) = y^{-1} \cdot (1 \cdot y) && (1) \\ &= y^{-1}y = 1. && (2) \end{aligned}$$

Sprzeczność. $\square$

Dowód tw. 1. Jeśli $m = \chi(\mathbb{F})$ byłaby liczbą złożoną, to istniałaby para liczb naturalnych k, l różnych od 1, że $m = kl$, Stąd

$$0 = m \times 1 = (k \times 1) \cdot (l \times 1).$$

Na mocy lematu 1, $k \times 1 = 0$ lub $l \times 1 = 0$. Ponieważ $k < m$ i $l < m$, więc znaleźlibyśmy liczbę mniejszą niż m, będącą rozwiązaniem równania $n \times 1 = 0$, co przeczy definicji m jako najmniejszej takiej liczby.

□

Definicja 3. Podciałem ciała $\mathbb{F}$ nazywamy każdy taki jego podzbiór $\mathbb{G}$, który liczy przynajmniej dwa elementy i jest zamknięty ze względu na cztery podstawowe działania; tzn. dla wszelkich $a, b \in \mathbb{G}$, $a+b, a-b, a \cdot b \in \mathbb{G}$, a także a/b należy do $\mathbb{G}$, o ile $b \neq 0$.

Komentarze.

1. W świetle tej definicji, ciała liczbowe to po prostu podciała ciała $\mathbb{R}$.
2. Zauważmy, że każde podciało $\mathbb{G}$ ciała $\mathbb{F}$ jest ciałem (z działaniami dodawania i mnożenia wziętymi z $\mathbb{F}$). Oczywiście, jest i odwrotnie.

Twierdzenie 3.

1. Każde ciało charakterystyki 0 zawiera podciało izomorficzne z $\mathbb{Q}$.
2. Każde ciało charakterystyki $p \neq 0$ zawiera podciało izomorficzne z $\mathbb{F}_p$.

Szkic dowodu. W każdym ciele charakterystyki 0 możemy utworzyć podzbiór złożony ze wszystkich elementów postaci

$$\frac{p \times 1}{q \times 1}, \quad -\frac{p \times 1}{q \times 1}, \quad \text{gdzie } p, q \in \mathbb{N}.$$

oraz z 0. Ten właśnie podzbiór tworzy podciało izomorficzne z $\mathbb{Q}$.

Jeśli ciało ma charakterystykę p, to jego podzbiór złożony z $0, 1, 2 \times 1, 3 \times 1, \ldots, (p-1) \times 1$ tworzy ciało izomorficzne z $\mathbb{F}_p$. □

Komentarze.

1. Pierwsza część twierdzenia 3 ma związek z twierdzeniem 1 z wykładu 1.
2. Ciała charakterystyki 0 muszą być nieskończone, a ciała charakterystki różnej od 0 nie muszą. Wszystkie ciała skończone są sklasyfikowane. Dla każdej liczby naturalnej q postaci $q = p^n$, gdzie p — liczba pierwsza, n — naturalna, istnieje jedyne ciało $\mathbb{F}_q$ o q elementach. Innych ciał skończonych nie ma.
3. Ciała $\mathbb{F}_q$ są dokładnie opisane.

Liczby zespolone

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej musi być liczbą niejemną, więc nie ma takiej liczby rzeczywistej, która byłaby rozwiązaniem równania $x^2 = -1$. Dołóżmy do systemu liczbowego element $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ i na podobieństwo $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ stwórzmy zbiór

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \{a + b\,\mathrm{i} \colon a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $z = a + b\,\mathrm{i}$, $s = c + d\,\mathrm{i}$ bedą elementami $\mathbb{C}$. Naśladując operacje w $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, przyjmijmy:

$$z + s = (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i} \tag{+}$$
$$z \cdot s = (a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i} \tag{$\bullet$}$$

Uwaga. Zamiast pisać $0 + b\,\mathrm{i}$ piszemy krótko $b\,\mathrm{i}$. Podobnie zamiast $a + 0\,\mathrm{i}$ piszemy a.

Zadanie 3. Sprawdź, że $\mathbb{C}$ z działaniami określonymi wzorami $(+)$, $(\bullet)$ jest ciałem.

Rozwiązanie (niekompletne).

Definicja 4. Elementy ciała $\mathbb{C}$ nazywamy *liczbami zespolonymi*. Jeśli $z = a + b\,\mathrm{i}$, to a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{re}\, z$, zaś b nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{im}\, z$. Tak więc $a = \mathrm{re}\, z$, $b = \mathrm{im}\, z$.

Definicja 5. *Liczbą sprzężoną* z liczbą zespoloną $z = a + b\,\mathrm{i}$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$.

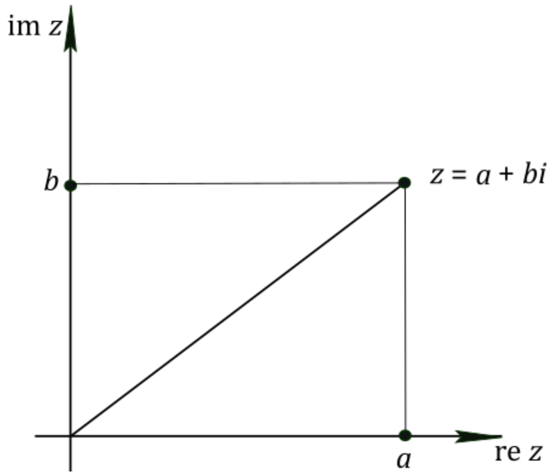
Zadanie 4. Odwzorowanie sprzężenia $z \mapsto \bar{z}$ jest automorfizmem ciała $\mathbb{C}$.

W świetle definicji automorfizmu ciała należy sprawdzić, że odwzorowanie sprzężenia jest różnowartościowe i *na*. Wynika to natychmiast stąd, że $\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = z$ oraz dla wszelkich $z, s \in \mathbb{C}$ zachodzą wzory:

$$\overline{z + s} = \bar{z} + \bar{s} \tag{s1}$$
$$\overline{z \cdot s} = \bar{z} \cdot \bar{s}\,. \tag{s2}$$

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Jeśli wprowadzić na płaszczyźnie kartezjański układ współrzędnych, to wtedy każdą liczbę zespoloną możemy utożsamić z punktem tej płaszczyzny i na odwrót:



$|z|$ oznacza odległość z od początku układu. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{re}\, z)^2 + (\mathrm{im}\, z)^2}.$$

Liczbę nieujemną $|z|$ nazywamy też *modułem* albo wartością bezwzględną liczby zespolonej z. Z drugiej strony,

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 + b^2. \tag{od1}$$

Mamy zatem

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \tag{od2}$$

Zadanie 4+1. Wywnioskuj z przedstawionego wzoru, niezależnie od wcześniej przedstawionego wywodu, że każda niezerowa liczba zespolona z ma odwrotność.

Niech s, z — liczby zespolone. Ze wzorów (s2), (od2) otrzymamy

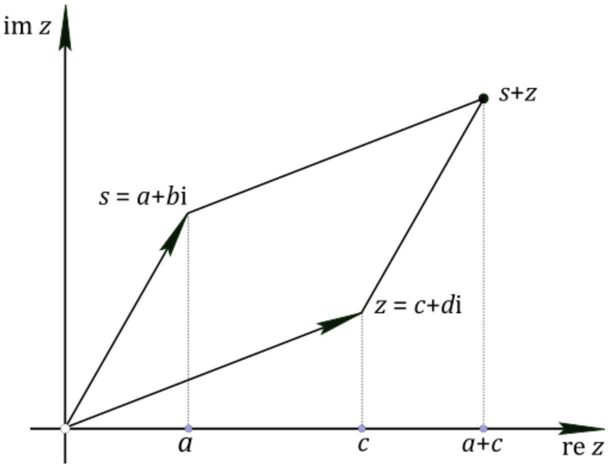
$$|sz|^2 = sz \cdot \overline{sz} = sz\bar{s}\bar{z} = s\bar{s}z\bar{z} = |s|^2|z|^2.$$

Stąd wynika interesujący wzór

$$|sz| = |s| \cdot |z|. \tag{m1}$$

Tzn. odległość iloczynu liczb zespolonych od początku układu (od 0) jest równa iloczynowi odległości tych liczb od 0.

Interpretacja geometryczna dodawania



Liczby zespolone dodają się zgodnie z regułą równoległoboku.

Zadanie 5. Udowodnić tożsamość równoległoboku:

$$|s+z|^2 + |s-z|^2 = 2(|s|^2 + |z|^2) \quad \text{dla wszelkich } s, z \in \mathbb{C}.$$

podać interpretację geometryczną tej tożsamości.

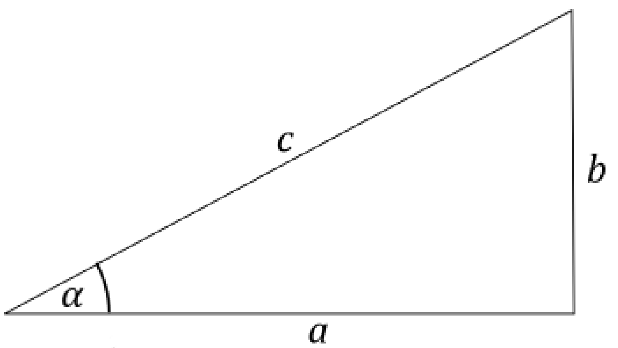
Zadanie 6. Podać interpretację geometryczną sprzężenia: $z \mapsto \bar{z}$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej; interpretacja geometryczna mnożenia

Dygresja trygonometryczna

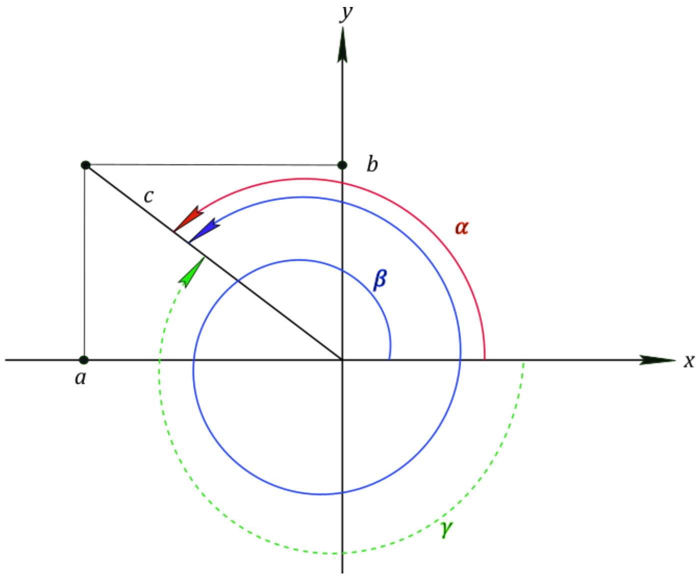
Sinus i cosinusa kąta ostrego

Kąty mierzymy miarą łukową (w radianach). Kąt półprosty ma miarę $\frac{\pi}{2}$.



$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{c}. \tag{t1}$$

Sinus i cosinus kąta dowolnego



Ramię c obraca się wokół początku układu. W trakcie ruchu "wymiata" kąt. Końcowe położenie ramienia może być jednakowe mimo "wymiecenia" różnych kątów. Na rysunku zaznaczono symbolicznie trzy ruchy. Każdy zaczynał się z położenia ramienia c na dodatniej półosi x. Kąt wymiatany w ruchu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara bierzemy ze znakiem plus, zgodnym — ze znakiem minus. Zależności między α, β, γ: $\beta = \alpha + 2\pi$, $\gamma = \alpha - 2\pi$. Ogólnie, dwa kąty wymiecione przez ramię, którego położenia poczatkowe i końcowe są jednakowe różnią się o krotność liczby 2π. Definicje funkcji sinus i cosinus możemy teraz rozszerzyć na dowolne kąty przyjmując te same wzory (t1). Teraz jednak a to odcięta końcowego położenia ramienia, b — rzędna, a c długość ramienia. Zaś kąt α to którykolwiek z kątów wymiecionych przez ramię c w ruchu od położenia na półosi dodatniej x do położenia końcowego.

Z definicji i w oparciu o rysunek łatwo przekonać się o prawdziwości następujących wzorów redukcyjnych:

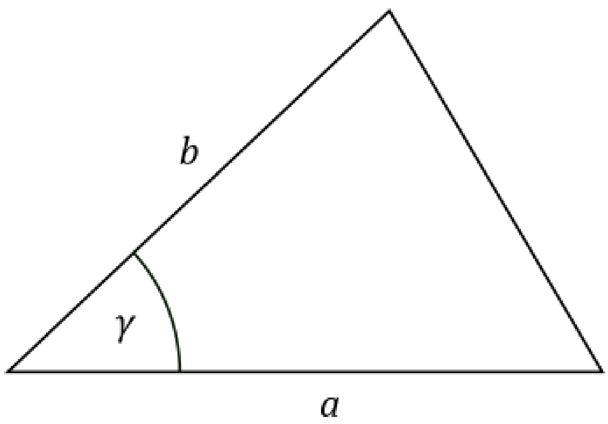
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha), \quad \text{dla wszelkich } k \in \mathbb{Z} \tag{r1}$$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha, \tag{r2}$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha. \tag{r3}$$

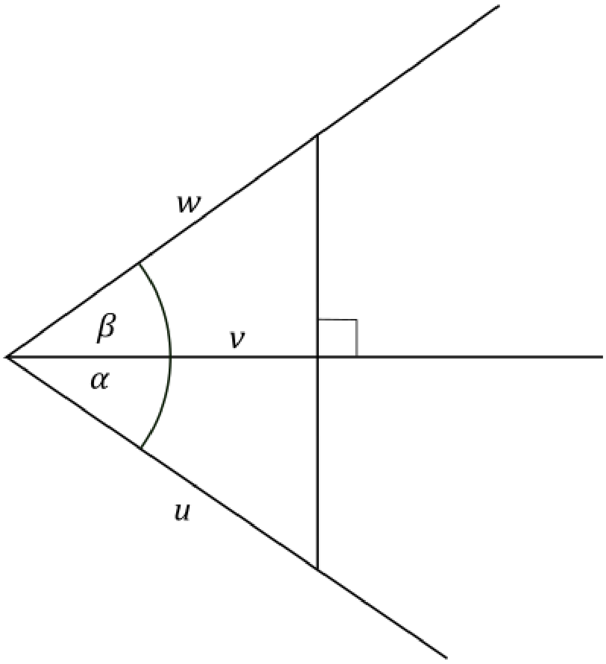
Cosinus i sinus sumy kątów

Pole trójkąta. Wzór bok-kąt-bok.



$$|\Delta| = \frac{ab\sin\gamma}{2}$$ <\center>

Wyprowadzenie wzoru na sinus sumy kątów:



W oparciu o wzór na pole trójkąta (bok-kąt-bok):

$$\frac{uw\sin(\alpha+\beta)}{2} = \frac{uv\sin\alpha}{2} + \frac{vw\sin\beta}{2}$$

Mnożąc obie strony przez $\frac{2}{uw}$ otrzymamy

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{v}{w}\sin\alpha + \frac{v}{u}\sin\beta$$

Jednak $v/w = \cos\beta$, zaś $v/u = \cos\alpha$. Stąd

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{s1}$$

Komentarz. Dowód przeprowadziliśmy jedynie dla kątów ostrych, ale wzór jest prawdziwy dla wszelkich kątów. Można się o tym przekonać za pomocą wzorów redukcyjnych.

Korzystając z (r2) i (r3) możemy także wyprowadzić wzór na cosinus sumy kątów:

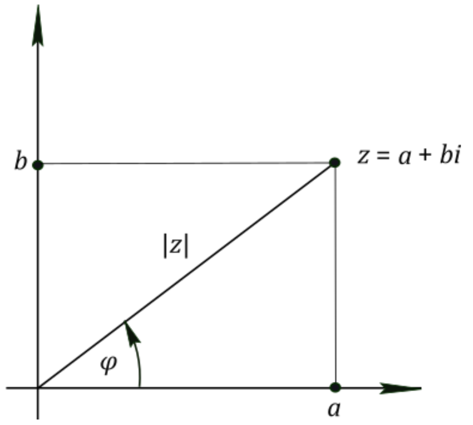
$$\begin{aligned} -\cos(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha+(\beta-\frac{\pi}{2})) = \sin\alpha\cos(\beta-\frac{\pi}{2}) + \cos\alpha\sin(\beta-\frac{\pi}{2}) && (3)\\ &= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta. && (4)\end{aligned}$$

I w rezultacie

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{s2}$$

Na tym kończymy dygresję trygonometryczną i wracamy do liczb zespolonych.

Niezerową iczbę zespoloną $z = a + b\,\mathrm{i}$ możemy przedstawić w tak zwanej postaci trygonometrycznej:



$$\frac{a}{|z|} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{|z|} = \sin\varphi.$$

Stąd

$$z = a + b\,\mathrm{i} = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \tag{zt}$$

Definicja 6. Prawą stronę równości (zt) nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Wyraża ona liczbę z za pomocą kąta φ i odległości $R = |z|$ liczby z od zera.

Definicja 7. Kąt φ nazywamy *argumentem* liczby zespolonej z. Wszystkie liczby $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ też są argumentami liczby z. Zbiór argumentów liczby z oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.

Niekiedy wyróżnia się *argument główny* liczby zespolonej z. Jest to ten spośród kątów $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, który należy do przedziału $[0, 2\pi)$. (Inni autorzy wybierają przedział $[-\pi, \pi)$). Oznaczamy go $\arg z$.

Wyrażenie na iloczyn dwóch liczb w postaci trygonometrycznej

Zadanie 7. Dano dwie niezerowe liczby zespolone w postaci trygonometrycznej. Wyznaczyć postać trygonometryczną ich iloczynu.

Rozwiązanie. Niech s, z oznaczają te liczby. Niech $r = |s|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} s$ oraz $R = |z|$ i $\theta \in \operatorname{Arg} z$. Wtedy

$$\begin{aligned} sz &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)R(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad (5)\\ &= rR((\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + (\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\,\mathrm{i}). \qquad (6)\end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (s1), (s2) wnosimy, że

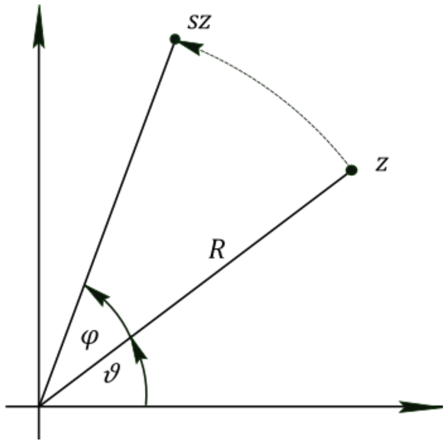
$$sz = rR(\cos(\varphi + \theta) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \theta)) \tag{il}$$

Ponieważ w zgodzie ze wzorem (m1), $rR = |sz|$, więc wzór (il) przedstawia postać trygonometryczną liczby sz; to znaczy, nie tylko $|sz| = rR$ ale także $\varphi + \theta \in \operatorname{Arg}(sz) =$ (moduły się mnożą, argumenty dodają). ☐

Przypuśćmy teraz, że s jest liczbą o module 1, tzn. $r = 1$. Wtedy wzór (il) przyjmie postać

$$sz = R(\cos(\varphi + \theta) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \theta)).$$

Wzór ten głosi, że sz powstaje przez obrót z o kąt φ wokół O. To znaczy, przyporządkowanie $z \mapsto sz$ jest obrotem o kąt φ wokół 0.



Tutaj ***Uwaga formalna.*** Przyjmijmy oznaczenie

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Liczba zespolona $e^{i\varphi}$ ma moduł równy 1 i argument φ. A ponieważ przy mnożeniu moduły się mnożą, a argumenty dodają, mamy wzór

$$e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi}\, e^{i\theta}. \tag{s3}$$

Wzór ten zawiera w sobie wzory (s1), (s2). Dlaczego?

Zadanie 8. Wyznaczyć postać trygonometryczną ilorazu dwu niezerowych liczb sespolonych s, z .

Rozwiązanie. Jeśli zostać przy oznaczeniach z zadanie 7, to mamy:

$$\frac{s}{z} = \frac{r}{R}(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)) = \frac{r}{R}e^{i(\varphi-\theta)}. \tag{ir}$$

Oczywiście r/R jest modułem liczby s/z, zaś $\varphi-\theta$ jest jej arumentem.

Iloczyn dowolnej liczby liczb o module 1. Wzór de Moivre'a

Przypuśćmy, że dano n liczb $z_1, \ldots, z_n$ o module 1. Niech ich argumenty wynoszą $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Wtedy postać trygonometryczna ich iloczynu przedstawia się następująco:

$$z_1 \cdots z_n = \prod_{i=1}^{n} e^{i\varphi_i} = e^{i(\varphi_1+\cdots+\varphi_n)} = e^{i\sum_{i=1}^{n}\varphi_i} = \cos\sum_{i=1}^{n}\varphi_i + i\sin\sum_{i=1}^{n}\varphi_i. \tag{mil}$$

Przypuśćmy teraz, że wszystkie z_i są równe z. I niech argument z to φ. Wtedy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Otrzymana zależność

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

nosi nazwę *wzoru de Moivre'a*.

Pierwiastki z jedności

Niech n - liczba naturalna. Każdą liczbę zespoloną z spełniającą równanie $z^n = 1$ nazywamy *pierwiastkiem z jedności stopnia* n.

Zadanie 9. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki z jedności stopnia n.

Rozwiązanie. Jeśli z jest takim pierwiastkiem, to ze wzoru (m1) wynika, że $1 = |z|^n$, a stąd $|z| = 1$. Niech φ oznacza argument główny liczb z. Ma zastosowanie wzór de Moivre'a:

$$1 = z^n = cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$$

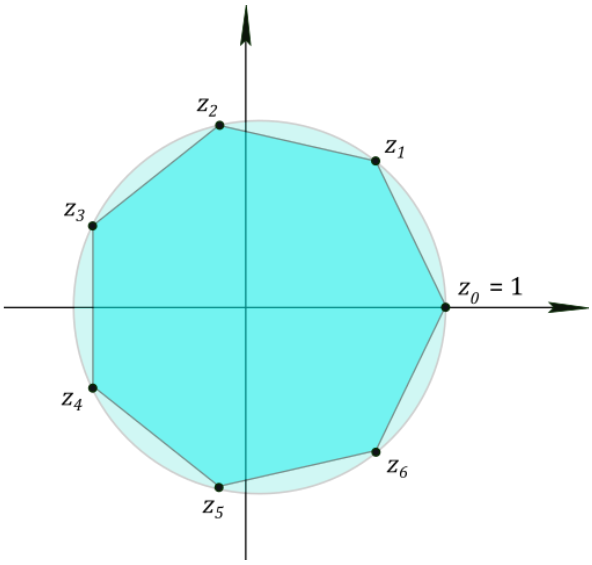
Ponieważ argumentem głównym liczby 1 jest 0, więc wszystkie jej argumenty to krotności liczby 2π. I otrzymujemy równanie $n\varphi = 2k\pi$, gdzie k musi być liczbą całkowitą nieujemną, bo lewa strona jest nieujemna. Dzieląc obie strony przez n, wobec tego, że φ jest argumentem głównym, dostaniemy $\varphi = \frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi)$, Innymi słowy, $k \in \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Otrzymaliśmy

Twierdzenie 4. Równanie $z^n = 1$ ma n pierwiastków:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}, \ldots, z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}, \ldots, z_{n-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Ponadto, dla wszelkich $k, l \in \mathbb{Z}_n$ mamy $z_{k \oplus l} = z_k z_l$.

Uwaga. Geometrycznie, pierwiastki n-tego stopnia stanowią wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w okrąg o promieniu 1 i środku 0.



Pierwiastki wielomianu $z^7 - 1$.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Definicja 8. *Wielomianem zespolonym stopnia* n nazywamy każdą funkcję w argumentu zespolonego z określoną wzorem

$$w(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

gdzie *współczynniki wielomianu* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są dowolnymi liczbami zespolonymi z tym, że *współczynnik wiodący* a_n jest niezerowy.

Pierwiastkiem wielomianu w nazywamy każdą liczbę zespoloną s, że $w(s) = 0$

Twierdzenie 5. (zasadnicze algebry) Jeśli w jest wielomianem stopnia $n \geq 1$, to w ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony.

Wniosek 6. (o rozkładzie na czynniki stopnia 1) Jeśli w jest wielomianem stopnia $n \geq 1$ o współczynniku wiodącym a_n, to istnieją liczby zespolone $z_1, \ldots, z_n$, niekoniecznie różne, że

$$w(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n), \text{ dla wszelkich } z \in \mathbb{C}.$$

W szczególności, $z_1, \ldots, z_n$ są pierwiastkami wielomianu w i innych nie ma.

Uwaga. Jeśli liczba s występuje w ciągu $z_1, \ldots, z_n$ dokładnie k-krotnie. To mówimy, że pierwiastek s wielomianu w ma krotność k.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli wszystkie współczynniki wielomianu w są rzeczywiste i s jest jego pierwiastkiem, to $\bar{s}$ jest także pierwiastkiem wielomianu w.

Następujący wniosek jest prostą konsekwencją poprzedniego i obserwacji zawartej w zadaniu 10.

Wniosek 7. Jeśli wielomian w stopnia ≥ 1 ma współczynniki rzeczywiste, to

$$w(z) = a_n w_1(z) \cdots w_k(z), \text{ dla wszelkich } z \in \mathbb{C}$$

oraz $w_1, \ldots, w_k$ są wielomianami jednej z dwu postaci:

- $z - a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;
- $z^2 + qz + r$, gdzie $q, r \in \mathbb{R}$ oraz $\Delta = q^2 - 4r < 0$.

Suma postępu geometryczny

Wielomian $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ nazywamy *sumą postępu geometrycznego* o n wyrazach. Zadanie polegana znalezieniu "zwartej" formy tej sumy; tzn. pozbawionej wielokropka. Obliczmy $(z-1)s_n$:

$$\begin{aligned} (z-1)s_n &= \quad z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} + z^n && (7) \\ & \quad -1 - z - z^2 - z^3 - \cdots - z^{n-1} && (8) \\ &= -1 + z^n && (9) \end{aligned}$$

W rezultacie, dla $z \neq 1$ otrzymujemy

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Niech teraz $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Na postawie wzoru de Moivre'a oraz wzoru na s_n mamy

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos(n-1)\varphi = \mathrm{re}\left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right).$$

Zadanie 11. Uprość wyrażenie stojące po prawej stronie ostatniej równości.

In [ ]: