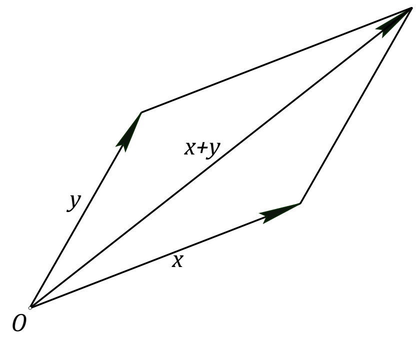
Wykład 4

Przestrzenie i podprzestrzenie liniowe. Bazy

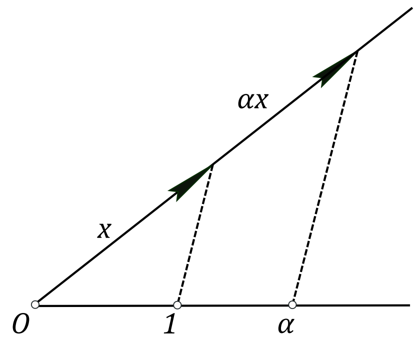
Rachunek strzałek

Dodawanie strzałek $(+)$:



Dodajemy strzałki zgodnie z regułą równoległoboku.

Mnożenie strzałek przez liczbę $(\cdot)$:



"Doświadczalnie" możemy sprawdzić, że rachunek strzałek ma następujące własności:

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

itp.

Przestrzenie liniowe

Definicja 1. *Przestrzenią liniową* nad $\mathbb{K}$ nazywamy każdy niepusty zbiór V z działaniem dodawania elementów $+$ oraz ich mnożeniem przez elementy ciała $\mathbb{K}$ (wynik należy do V), jeśli

1. dodawanie jest przemienne
2. dodawanie jest łączne
3. dodawanie ma element neutralny nazywany zerem $\mathbf{0}$
4. każdy element w V ma przeciwny.

(Krótko, V z dodawaniem jest grupą przemienną.)

dla wszelkich $x, y \in V$ oraz wszelkich $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

1. $1 \cdot x = x$

2. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (łączność mnożenia przez skalar)
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Elementy przestrzeni V nazywamy *wektorami* zaś ciała $\mathbb{K}$ *skalarami*. O przestrzeni V mówimy czasami *przestrzeń wektorowa*.

Przykłady.

1. Jeśli $\mathbb{K}$ jest podciałem ciała $\mathbb{F}$, to $\mathbb{F}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$. W szczególności,

- $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$, ale także nad $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jest przestrzenią liniowa nad $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ są przestrzeniami liniowymi nad $\mathbb{R}$.

1. Niech $n -$ liczba naturalna i $\mathbb{K} -$ ciało. Niech $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$. Określmy w $\mathbb{K}^n$ dodawanie i mnożenie przez skalary (elementy ciała $\mathbb{K}$):

- Jeśli $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) -$ elementy $\mathbb{K}^n$, to

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

(Dodawanie to nazywamy *dodawaniem po współrzędnych*.)

- Jeśli dodatkowo $\alpha \in \mathbb{K}$, to

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych. Wtedy każdej parze liczb (x, y) możemy przyporządkować strzałkę idącą z początku układu do punktu o współrzędnych (x, y). Nietrudno zauważyć, że rachunek strzałek (ich dodawanie i mnożenie przez skalary) jest tożsamy z działaniami w $\mathbb{R}^2$ określonymi w 2.

1. Niech $X -$ dowolny niepusty zbiór oraz $\mathbb{K}^X -$ zbiór wszystkich funkcji z X w $\mathbb{K}$. Zbiór ten tworzy przestrzeń liniową z działaniami:

- dodawanie funkcji $f, g \in \mathbb{K}^X$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- mnożenie funkcji $f \in \mathbb{K}^X$ przez skalar $\alpha \in \mathbb{K}$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Przestrzeń opisana w 3. jest przedmiotem lekcji szkolnych i analizy matematycznej I, gdzie rozpatrywany jest przypadek $X = \mathbb{R}$ lub X jest pewnym przdziałem, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Uwaga! Elementy przestrzeni $\mathbb{K}^n$ będziemy zapisywali w dwojaki sposób:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Definicja 2. Niech V przestrzen liniowa nad $\mathbb{K}$. Podzbiór W przestrzeni V, w którym wykonalne jest dodawanie wektorów i mnożenie ich przez skalary (działania wzięte są z V) nazywamy *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V.

Zwróćmy uwagę, że podprzestrzeń liniowa sama w sobie jest przestrzenią liniową.

Przykład. Rozpatrzmy wszystkie wielomiany $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to znaczy funkcje postaci:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Oznaczmy ich zbiór przez $P(\mathbb{R})$. Oczywiście zbiór ten tworzy podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Jasnym jest, w podobny sposób możemy określić wielomiany o współczynnikach z dowolnego ciała $\mathbb{K}$.

Definicja 3. Niech V oznacza przestrzeń liniową na $\mathbb{K}$. Niech $x^1, \ldots, x^m \in V$. Każdy wektor $x \in V$, który można przedstawić w postaci:

$$x = \alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m,$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $x^1, \ldots, x^m$.

Uwaga! Symbol x^k w żadnym razie nie oznacza potęgi. Jest to oznaczenie na k-ty element w ciągu.

Stwierdzenie 1. Niech M oznacza niepusty podzbiór przestrzeni liniowej V. Zbiór $\langle M \rangle$ wszystkich kombinacji liniowych, które można utworzyć z elementów zbioru M jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V

Dowód. Niech $x, y \in \langle M \rangle$. Wówczas muszą istnieć wektory $x^1, \ldots x^k, y^1, \ldots, y^l \in M$ oraz skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha^k, \beta^1, \ldots, \beta^l$, że

$$x = \alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_k x^k, \quad y = \beta_1 y^1 + \cdots + \beta_l y^l,$$

Wtedy dla wszelkich $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mamy

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_k x^k) + \beta(\beta_1 y^1 + \cdots + \beta_l y^l) && (1) \\ &= \alpha\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha\alpha_k x^k + \beta\beta_1 y^1 + \cdots + \beta\beta_l y^l. && (2) \end{aligned}$$

Wektor $\alpha x + \beta y$ jest więc kombinacją liniową elementów zbioru M, a zatem elementem $\langle M \rangle$. Stąd $\langle M \rangle$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.□

Definicja 4. Podprzestrzeń $\langle M \rangle$ określoną w stwierdzeniu 1 nazywamy *podprzestrzenią rozpiętą* na zbiorze M albo *powłoką liniową* zbioru M. (Często jest ona oznaczana $\operatorname{lin} M$.)

Ćwiczenie 1. Oczywiście $P(\mathbb{R}) = \operatorname{lin}\{1,\, x,\, x^2, \ldots\}$. Wykazać, że

$$P(\mathbb{R}) = \operatorname{lin}\{1,\, x-1,\, x^2 - x,\, x^3 - x^2, \ldots\}.$$

Ćwiczenie 2. Wykazać, że

$$\operatorname{lin}\{1,\, x^2,\, x^4, \ldots\} \neq \operatorname{lin}\{1,\, x,\, x^3, \ldots\}.$$

Definicja 5. Układ wektorów $x^1, \ldots, x^m$ przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{K}$ jest *liniowo niezależny* jeśli dla wszelkich skalarów $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ stąd, że

$$\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m = \beta_1 x^1 + \cdots + \beta_m x^m$$

wynika, że $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Innymi słowy, jeśli x jest kombinacją liniową elementów $x^1, \ldots, x^m$, to współczynniki tej kombinacji są określone jednoznacznie.

Twierdzenie 2. Układ wektorów $x^1, \ldots, x^m$ przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{K}$ jest *liniowo niezależny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszelkich $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ stąd, że

$$\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m = \mathbf{0}. \tag{0}$$

wynika, iż $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Dowód. ($\Rightarrow$)

$$\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m = \mathbf{0} = 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_m$$

Skoro układ $x^1, \ldots, x^m$ jest liniowo niezależny, to $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

($\Leftarrow$) Dla wszelkich współczynników $\beta_1, \ldots \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, jeśli

$$\beta_1 x^1 + \cdots + \beta_m x^m = \gamma_1 x^1 + \cdots + \gamma_m x^m,$$

to

$$(\beta_1 - \gamma_1) x^1 + \cdots + (\beta_m - \gamma_m) x^m = \mathbf{0}.$$

Wobec założenia (0), $\beta_1 - \gamma_1 = \ldots = \beta_m - \gamma_m = 0$, co pociąga $\beta_1 = \gamma_1, \ldots, \beta_m = \gamma_m$ i w konsekwencji otrzymujemy liniową niezależność układu $x_1, \ldots, x_m$.$\square$

Definicja 6. Podzbiór M przestrzeni liniowej V nazwiemy *zbiorem wektorów liniowo niezależnych*, lub krótko *zbiorem liniowo niezależnym* jeśli każdy układ $x^1, \ldots, x^m$ elementów zbioru M jest liniowo niezależny. Jeśli zbiór M nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest *liniowo zależny*. Podobnie w przypadku układów.

Twierdzenie 3. Układ wektorów $y^1, \ldots, y^s$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. ($\Rightarrow$) Na podstawie twierdzenia 2 musi istnieć ciąg skalarów $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, przy czym nie wszystkie są równe 0, że

$$\gamma_1 y^1 + \ldots + \gamma_s y^s = \mathbf{0}.$$

Niech k będzie takim wskaźnikiem, że $\gamma_k \neq 0$. Wtedy powyższą równość możemy przepisać

$$\gamma_k y^k = \sum_{i=1}^{k-1} (-\gamma_i) y^i + \sum_{i=k+1}^{s} (-\gamma_i) y^i.$$

Mnożąc obie strony przez odwrotność współczynnika γ_k otrzymamy

$$y^k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_k}\right) y^i + \sum_{i=k+1}^{s} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_k}\right) y^i.$$

Implikacja ($\Leftarrow$) jest raczej oczywista.$\square$

Definicja 5. Podzbiór B przestrzeni liniowej V nazywamy *bazą* tej przestrzeni o ile:

1. B jest liniowo niezależny;

2. jeśli podzbiór G przestrzeni V zawiera zbiór B oraz zbiory te nie są równe, to G jest liniowo zależny.

(Krótko, B jest *maksymalnym* zbiorem liniowo niezależnym.)

Twierdzenie 4. Podzbiór B przestrzeni liniowej V jest jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy B jest liniowo niezależny oraz $\operatorname{lin} B = V$.

Dowód. ($\Rightarrow$, nie wprost) Przypuśćmy, że $\operatorname{lin} B \neq V$. Wtedy istnieje wektor $x \in V \setminus \operatorname{lin} B$. Niech $\bar{B} = B \cup \{x\}$. Oczywiście $\bar{B}$ zawiera B i jest od B różny, więc na mocy definicji bazy jest liniowo zależny. Stąd musi istnieć układ jego elementów $y_1, \ldots, y_s$ oraz układ skalarów $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, z których nie wszystkie są zerowe, że

$$\gamma_1 y^1 + \ldots + \gamma_s y^s = \mathbf{0}.$$

Pośród elementów $y^i, i = 1, \ldots, s$ musi wystąpić x, bo w przeciwnym razie wszystkie te elementy leżałyby w B, więc tworzyły układ liniowo niezależny. w takim razie $x = y^k$, dla pewnego k, co więcej, $\gamma_k \neq 0$,, bo w przeciwnym razie otrzymalibyśmy sprzeczność z przypuszczeniem, że przynajmniej jeden ze współczynników γ_i jest niezerowy. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3 możemy teraz wyrachować, że

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_k}\right) y^i + \sum_{i=k+1}^{s} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_k}\right) y^i,$$

co oczywiście przeczy założeniu, że $x \notin \operatorname{lin} B$.

($\Leftarrow$) Niech $x \notin B$. Skoro $x \in \operatorname{lin} B$, to x jest kombinacją liniową pewnego układu $y_1, \ldots y_s \in B$, zatem układ $x, y_1, \ldots, y_s$ jest liniowo zależny, więc liniowo zależny jest zbiór $B \cup \{x\}$. Stąd B jest bazą. □

Twierdzenie Steinitza o wymianie

Twierdzenie 5. Jeśli układ wektorów $e^1, \ldots, e^s$ stanowi bazę przestrzeni V oraz układ $f^1, \ldots, f^r \in V$ jest liniowo niezależny, to $r \leq s$ oraz można wybrać $s - r$ wektorów spośród $e^1, \ldots, e^s$ tak, że w połączeniu z $f^1, \ldots, f^r$ utworzą one bazę przestrzeni V

Dowód twierdzenia 5. Na mocy twierdzenia 4 istnieją skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, że

$$f^1 = \alpha_1 e^1 + \cdots + \alpha_{s-1} e^{s-1} + \alpha_s e^s. \tag{s1}$$

Ponieważ układ $f^1, \ldots, f^r$ jest liniowo niezależny, więc $f^1 \neq \mathbf{0}$. Stąd przynajmniej jeden skalar α_i jest różny od zera. Dla skupienia uwagi przyjmijmy, że $\alpha_s \neq 0$. Sprawdźmy, że wtedy układ $e^1, \ldots, e^{s-1}, f^1$ jest bazą. Zacznijmy od sprawdzenia liniowej niezależności. Przypuśćmy, że

$$\beta_1 e^1 + \cdots + \beta_{s-1} e^{s-1} + \beta_s f^1 = \mathbf{0}. \tag{s2}$$

Zastąpmy f^1 w zgodzie z $(s1)$. Otrzymamy

$$(\beta_1 + \beta_s \alpha_1) e^1 + \cdots + (\beta_{s-1} + \beta_s \alpha_{s-1}) e^{s-1} + \beta_s \alpha_s e^s = \mathbf{0}.$$

Ponieważ układ $e^1, \ldots, e^s$ jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia 2, $\beta_1 + \beta_s \alpha_1 = 0$, $\ldots, \beta_{s-1} + \beta_s \alpha_{s-1} = 0$, $\beta_s \alpha_s = 0$. Skoro $\alpha_s \neq 0$, więc $\beta_s = 0$. Wtedy jednak $\beta_1 = \cdots = \beta_{s-1} = 0$ i powtórnie stosując twierdzenie 2 wnosimy, że układ $e^1, \ldots, e^{s-1}, f^1$ jest liniowo niezależny.

By ustalić, że układ ten stanowi bazę, wystarczy teraz sprawdzić, że każdy element $x \in V$ jest pewną kombinacją liniową wektorów tego układ i powołać się na twierdzenie 4. Skoro układ $e^1, \ldots, e^s$ jest bazą, więc istnieją skalary γ_i, że

$$x = \gamma_1 e^1 + \cdots \gamma_{s-1} e^{s-1} + \gamma_s e^s.$$

Z $(s1)$ wyrachujmy e^s (możemy to uczynić, bo przyjęliśmy, że $\alpha_s \neq 0$).

$$e^s = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right) e^1 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s}\right) e^{s-1} + \frac{1}{\alpha_s} f^1.$$

Zastąpmy e^s w wyrażeniu na x i uporządkujmy:

$$x = \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_s \alpha_1}{\alpha_s}\right) e^1 + \cdots + \left(\gamma_{s-1} - \frac{\gamma_s \alpha_{s-1}}{\alpha_s}\right) e^{s-1} + \frac{\gamma_s}{\alpha_s} f^1.$$

Ustaliliśmy więc, że układ $e^1, \ldots, e^{s-1}, f^1$ jest bazą. Wykonaliśmy pierwszy krok "wymiany" wektorów bazy wyjściowej $e^1, \ldots, e^s$ na wektory układu $f^1, \ldots, f^r$. W wymianie uczestniczył f^1 , pozostaje dokonać jeszcze wymiany na wektory $f^2, \ldots, f^r$.

Załóżmy, że wykonaliśmy i kroków wymiany i otrzymaliśmy układy wektorów: $e_i^1, \ldots, e_i^{s-i}, e_i^{s-i+1}, \ldots, e_i^s$ oraz $f_{i+1}, \ldots, f_r$ o nastepujących własnościach:

- układ $e_i^1, \ldots, e_i^{s-i}, e_i^{s-i+1}, \ldots, e_i^s$ jest bazą przestrzeni V
- wektory $e_i^1, \ldots, e_i^{s-i}$ są wektorami należącymi do układu $e^1, \ldots e^s$
- układ $e_i^{s-i+1}, \ldots, e_i^s$ jest tożsamy z układem $f^1, \ldots, f^i$.

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy znowu, że $e_i^1 = e_1$, ..., $e_i^{s-i} = e_{s-i}$. Podobnie jak wpierwszym kroku, skoro $e^1, \ldots, e^{s-i}, f_1, \ldots, f_i$ jest bazą przestrzeni V, to istnieją takie skalary $\delta_1, \ldots, \delta_s \in \mathbb{K}$

$$f_{i+1} = \delta_1 e^1 + \cdots + \delta_{s-i} e^i + \delta_{s-i+1} f^1 + \cdots + \delta_s f^i.$$

Nie wszystkie skalary $\delta_1, \ldots, \delta_{s-i}$ są zerami, bo w przeciwnym razie z twierdzenia 3 wynikałoby, że układ $f^1, \ldots, f^r$ jest liniowo zależny, wbrew założeniu. Znowu dla uproszczenia zapisu możemy przyjąć, że $\delta_{s-i} \neq 0$. Wtedy powtarzając rozumowanie z pierwszego kroku e^{s-i} możemy wymienić na f_{i+1}. Otrzymamy nową bazę, w której leżą wektory $f^1, \ldots, f^{i+1}$, a pozostałe $s-(i+1)$ należą do układu $e_1 \ldots, e_s$.

Ostaecznie wymienimy r sposród wektorów $e^1, \ldots, e^s$ na $f^1, \ldots, f^r$, otrzymując żądaną bazę
$\square$

Wniosek 6. Jeśli układy $e^1, \ldots, e^s$ i $f^1, \ldots, f^r$ są bazami przestrzeni V , to $r = s$.

Wniosek 7. Jeśli układ $e^1, \ldots e^s$ wektorów przestrzeni V jest bazą oraz $f^1, \ldots, f^s$ jest liniowo niezależnym układem wektorów tej przestrzeni, to ten drugi też jest bazą.

Definicja 6. *Wymiarem* przestrzeni V nazywamy liczbę $\dim V$ elementów którejkolwiek z baz tej przestrzeni. Jeśli przestrzeń nie ma bazy o skończonej liczbie elementów, to piszemy $\dim V = \infty$ i mówimy, że przestrzeń ma wymiar nieskończony. W przeciwnym razie o V powiemy, że jest wymiaru skończonego.

Przykłady.

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Dowód. Niech $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots, e^n = (0, \dots, 0, 1)$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{K}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n$$

oraz $x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \dots = x_n = 0$. W świetle twierdzenia 4 układ $e^1, \dots, e^n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Bazę tę nazywamy *bazą standardową* przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Wektor e^i bywa nazywany i-tym *wersorem*.

1. $\dim P(\mathbb{R}) = \infty$.

Dlatego że jednomiany $1, x, x^2, \dots$ są liniowo niezależne, a jest ich nieskończenie wiele. Rzeczywiście, niech wielomian w, $w(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m$ będzie tożsamościowo równy zero, wtedy wszystkie współczynniki α_i muszą być zerowe. Wynika to stąd, że wielomian niezerowego stopnia ma tylko skończenie wiele pierwiastków.

1. Niech $P_n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n. Wtedy jednomiany $1, x, \dots, x^n$ stanowią bazę tej przestrzeni. Mamy więc $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Ćwiczenie 4. Wykazać, że funkcje $1, \cos x, \dots, \cos(nx), \dots$ są liniowo niezależne.