Nierówność między średnimi (GA)

Dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{GA}$$

(nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną).

Dowód Cauchy'ego. Ograniczmy się najpierw do ciągów liczb o długości n postaci $n = 2^k$. Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne ze względu na k. Jeśli $k = 1$ to nierówność sprowadza się do

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Ta jest oczywiście prawdziwa. Niech teraz $k > 1$. Korzystając z przesłanki indukcyjnej mamy:

$$\gamma := \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} = \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k-1}}} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} a_{2^{k-1}+2} \cdots a_{2^k}}},$$

$$\gamma \leqslant \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \cdot \frac{a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}},$$

$$\gamma \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right),$$

$$\gamma \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}.$$

Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Zawsze znajdziemy k, że dla $m = 2^k$ mamy $n < m$. Przyjmijmy

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Stąd, że nierówność zachodzi dla ciągów długości m mamy

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_n \alpha^{m-n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (m-n)\alpha}{m} = \alpha,$$

$$a_1 a_2 \cdots a_n \alpha^{m-n} \leqslant \alpha^m.$$

Skąd już łatwo wynika żądana nierówność.

Inny dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ nie ma czego dowodzić. Niech $n > 1$. Niech α będzie określona tak jak w poprzednim dowodzie. Jeśli wszystkie a_i są sobie równe, to nierówność GA oczywiście zachodzi. Możemy więc przyjąć, że tak nie jest. Wtedy porządkując na nowo ciag $a_1, \ldots, a_n$, jeśli to konieczne, możemy dodatkowo przyjąć, że $a_{n-1} < \alpha < a_n$. Niech $u = a_{n-1} + a_n - \alpha$. Oczywiście $u > 0$. Na podstawie przesłanki indukcyjnej

$$a_1 \cdots a_{n-2} u \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-2} + u}{n-1} \right)^{n-1} = \alpha^{n-1}.$$

Ponieważ dodatkowo $a_{n-1} a_n < u\alpha$, więc

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots a_{n-2} a_{n-1} a_n < a_1 \cdots a_{n-2} u\alpha \leqslant \alpha^n.$$

Przy okazji wykazaliśmy, że w nierówności GA równość zachodzi tylko w tym przypadku, gdy wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są równe. Oczywiście fakt ten można także wywnioskować przez rozbiór rozumowania Cauchy'ego.