

EGZAMIN Z ALGEBRY

Imię i nazwisko., Grupa.

Zadanie 1.

- (1) Zbiór $\{a + b\sqrt{3} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ jest ciałem liczbowym.
- (2) Istnieje ciało liczbowe \mathbb{F} , że $\frac{3}{5} \notin \mathbb{F}$.
- (4) Istnieje nieskończenie wiele ciał liczbowych.

Zadanie 2.

- (1) Jeśli liczba $u \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $x^2 + bx + 1 = 0$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, to liczba u^{-1} też spełnia to równanie.
- (2) Działanie $a \circ b = \frac{ab}{a+b}$ określone w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich jest łączne.
- (4) Działanie $a \circ b$ określone powyżej jest rozdzielne względem zwykłego dodawania.

Zadanie 4.

- (1) Reszta z dzielenia przez 5 liczby 312 wynosi 3.
- (2) Reszta z dzielenia 15^{45} przez 43 wynosi 10.
- (4) Dla każdej liczby naturalnej n reszta z dzielenia 16^n przez 15 jest 1.

Zadanie 6.

- (1) $\frac{1}{3-2i} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$.
- (2) Dla każdej liczby zespolonej z , $\text{im}(z\bar{z}) = 0$.
- (4) Niech $z = 1 + i$ oraz $t = 2 + 3i$. Zachodzi równość $|z + t|^2 + |z - t|^2 = 15$.

Zadanie 8.

- (1) W ciele kwaternionów zachodzi tożsamość $\mathbf{kij} = \mathbf{ijk}$.
- (2) Istnieje kwaternion q , że $q\bar{q} \neq \bar{q}q$.
- (4) Zbiór kwaternionów postaci $a + b\mathbf{k}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest podciałem ciała kwaternionów.

Zadanie 9.

- (1) Jeśli permutacja $\sigma = 3124$, zaś $\tau = 1243$, to $\sigma\tau = 3142$.
- (2) Jeśli $\sigma = 32541$, to $\sigma^{-1} = 14523$.
- (4) Istnieją zbiory skończone A i B zawarte w $\{1, \dots, 1000\}$, że A , $A\Delta B$ są parzyste, zaś B – nieparzysty.

Zadanie 11.

- (1) Układ $\mathbf{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^4 .
- (2) Układ $\mathbf{u} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1, 0, 0)$ jest bazą w \mathbb{R}^4 .
- (4) Istnieje baza w \mathbb{R}^6 , która ma pięć elementów.

Zadanie 13.

- (1) Układ $\mathbf{u} = ((1, -1), (1, 0))$ jest bazą w \mathbb{R}^2 , zaś $(2, 3)_{\mathbf{u}}$ są współrzędnymi wektora $(5, 2)$ w tej bazie.
- (2) Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji z \mathbb{R} do \mathbb{R} ma wymiar skończony.
- (4) Jeśli $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe oraz $T(2, 1) = (3, 4)$ i $T(-1, 2) = (0, 1)$, to $T(3, 4) = (6, 7)$.

Zadanie 15.

- (1) Mnożenie macierzy jest łączne i nieprzemienne.
- (2) Jeśli $A \in M_{2 \times 5}(\mathbb{R})$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, to $\text{rank} A \geq 3$.
- (4) Jeśli w macierzy A powtarzają się dwa wiersze, to macierz B powstała przez wykreślenie jednego z nich ma ten sam rząd kolumnowy co A .

Zadanie 16.

- (1) Niech $T \in L(V, W)$. Wiemy, że $\dim \ker T = 5$ oraz $\dim W = 15$. W takim razie $\dim \text{im } T = 10$.
- (2) Wektory $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$ stanowią bazę przestrzeni \mathbb{R}^2 , a wektory $\mathbf{u}^1 = [1, 0]$, $\mathbf{u}^2 = [1, 1]$ tworzą bazę do niej dualną w przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^*$.
- (4) Jeśli $T \in L(V, W)$, to $T^* \in L(V^*, W^*)$.

Zadanie 18.

- (1) Macierz odwrotna $B^{-1} = [d_{ij}]$ do macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ma wyraz $d_{23} = -1$.
- (2) Niech $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Zachodzi wzór $\det(AB)^t = (-1) \det A \det B$.
- (4) Jeśli w układzie równań liniowych liczba równań nie przekracza liczby niewiadomych, to taki układ ma zawsze rozwiązanie.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18