§1. Podprzestrzenie ortogonalne.

DEFINICJA 1 Podprzestrzeń liniową K przestrzeni euklidesowej V nazywamy *ortogonalną* do podprzestrzeni $L \subseteq V$ (piszemy: $K \perp L$) , jeśli

$$\bigwedge_{u \in K} \bigwedge_{v \in L} \qquad \langle u, v\rangle = 0.$$

Oczywiście $K \perp L$ znaczy tyle samo, co $L \perp K$. Dlatego o K i L mówimy, że są *wzajemnie ortogonalne* lub krócej, *ortogonalne.*

STWIERDZENIE 1 *Jeśli $L_1, \ldots, L_k$ są wzajemnie ortogonalnymi podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V, to $L_1 + \cdots + L_k$ jest sumą prostą tych podprzestrzeni.*

Dowód. Niech $v_i,\ w_i \in L_i$, $i = 1, \ldots, k$, i niech $v_1 + \cdots + v_k = w_1 + \cdots + w_k$. Wtedy dla każdego wskaźnika i ze względu na wzajemną ortogonalność podprzestrzeni otrzymamy

$$0 = \langle (v_1 - w_1) + \cdots + (v_k - w_k), v_i - w_i\rangle = \langle v_i - w_i, v_i - w_i\rangle.$$

Stąd $v_i = w_i$, co oznacza, że każdy element przestrzeni $L_1+\cdots+L_k$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci sumy składników należących do poszczególnych L_i. Przestrzeń ta jest więc, na mocy definicji, sumą prostą składników L_i. $\square$

DEFINICJA 2 Sumę wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni $L_1, \ldots, L_k$ nazywamy *sumą ortogonalną* i oznaczamy często $L_1 \boxplus \cdots \boxplus L_k$.

DEFINICJA 3 Niech L oznacza podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V. *Dopełnieniem ortogonalnym* podprzestrzeni L nazywamy zbiór

$$L^{\perp} := \{v \in V\colon \langle v, x\rangle = 0, \text{ dla każdego } x \in L\}.$$

ZADANIE 1 $L^{\perp}$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.*

STWIERDZENIE 2 *Jeśli przestrzeń euklidesowa V jest skończonego wymiaru, L jest jej podprzestrzenią, to*

(i) $V = L \boxplus L^{\perp}$;

(ii) $L^{\perp\perp} := (L^{\perp})^{\perp} = L$.

Dowód. Niech układ $v_1, \ldots v_k$ stanowi bazę ortonormalną przestrzeni L. Uzupełnijmy ją do bazy $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} \ldots, v_m$ przestrzeni V. Do tej bazy zastosujmy proces ortogonalizacyjny Grama–Schmidta. W rezultacie wytworzymy bazę ortonormalną przestrzeni V. Ponieważ $v_1, \ldots, v_k$ stanowią układ ortonormalny, więc ortogonalizacja nie naruszy go i wektory te wejdą w skład tej bazy. Elementy wytworzonej bazy będziemy nadal oznaczać symbolami v_i. Zauważmy teraz, że jeśli jakiś wektor jest ortogonalny do wszystkich wektorów ustalonej bazy pewnej podprzestrzeni, to leży w dopełnieniu ortogonalnym tej podprzestrzeni. Stąd $K := \mathrm{lin}\{v_{k+1}, \ldots v_m\} \subseteq L^{\perp}$. Z drugiej strony,

$$V = L \boxplus K. \tag{1}$$

Gdyby więc $L^\perp \neq K$, to istniałby wektor niezerowy $x \in L^\perp \setminus K$, którego przedstawienie w postaci $x = u + v$, gdzie $u \in L$, $v \in K$ miałoby niezerową składową u. Ale wtedy $\langle x, u\rangle = |u|^2 > 0$, co przeczyłoby założeniu, że $x \in L^\perp$. W ten sposób dowiedliśmy (i).

Co się tyczy (ii), zauważmy, że $L \subseteq L^{\perp\perp}$. W takim razie na podstawie (i)

$$V = L^\perp \boxplus L \subseteq L^\perp \boxplus L^{\perp\perp} \subseteq V.$$

Równość (ii) łatwo teraz wynika albo poprzez porównanie wymiarów, albo poprzez powtórzenie rozumowania dowodzącego równości $K = L^\perp$. □

§2. Twierdzenie spektralne.

DEFINICJA 4 Niech V oznacza przestrzeń euklidesową. Odwzorowanie $T \in \operatorname{End} V$ nazywamy *symetrycznym* albo *samosprzężonym*, jeśli $T^* = T$ lub, co na jedno wychodzi,

$$\bigwedge_{v,w\in V} \qquad \langle w, Tv\rangle = \langle Tw, v\rangle.$$

UWAGA 1 Przypuśćmy, że $\mathbb{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ jest jakąkolwiek uporządkowaną bazą ortonormalną w V. Niech $T \in \operatorname{End} V$. Jak łatwo sprawdzić, wyrazy a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ odzwzorowania T względem baz $(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ spełniają związek $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$. W takim razie, jeśli T jest symetryczne, to

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, T(v_i)\rangle = \langle T(v_i), v_j\rangle = a_{ij},$$

co oznacza, że $A^{\mathsf{T}} = A$. Mówimy wtedy, że A jest macierzą symetryczną. Jak łatwo sprawdzić, jest i odwrotnie: symetryczność A pociąga symetryczność T. W szczególności widzimy więc, że jeśli A jest macierzą symetryczną wymiaru $m \times m$ to określa ona endomorfizm samosprzężony przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$.

TWIERDZENIE 3 (O DIAGONALIZACJI) *Jeśli V – przestrzeń euklidesowa wymiaru $m < \infty$, $T \in \operatorname{End} V$ – odwzorowanie samosprzężone, to istnieje baza ortonormalna $e_1, \ldots, e_m$ przestrzeni V oraz liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, że dla każdego wskaźnika i zachodzi równość*

$$T(e_i) = \lambda_i(e_i).$$

Innymi słowy, macierz odwzorowania T względem baz $(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, gdzie $\mathbb{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

UWAGA 2 Twierdzenie o diagonalizacji nosi też nazwę twierdzenia spektralnego. Spektrum to po polsku tyle co widmo. Termin zaczerpnięty jest z fizyki. Pewna bardziej ogólna wersja twierdzenia o diagonalizacji odgrywa bardzo ważną rolę w mechanice kwantowej. Tam jednak w miejsce przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych używa się przestrzeni nad ciałem liczb zespolonych.

LEMAT 4 *Jeśli V jest przestrzenią euklidesową wymiaru $m < \infty$, odwzorowanie $T \in \operatorname{End} V$ jest samosprzężone, to T ma wektor własny.*

Dowód. Przypuśćmy, że T nie ma wektora własnego. Niech $\mathbb{E}$ – dowolnie wybrana baza uporządkowana w V i niech A – macierz odwzorowania T względem baz $(\mathbb{E}, \mathbb{E})$. Przypomnijmy, że V jest przestrzenią nad $\mathbb{R}$. W takim razie $\gamma \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\gamma E - T) \neq \{0\}$, to znaczy, gdy istnieje wektor (własny) $x \neq 0$, że $T(x) = \gamma x$. Wobec naszego przypuszczenia, wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego muszą być zespolone. Niech τ będzie jednym z nich. Skoro $w(\tau) = 0$, to

$$0 = w(\tau)w(\bar{\tau}) = \det((\tau I - A)(\bar{\tau} I - A)) = \det(|\tau|^2 I - 2\operatorname{re}(\tau)A + A^2).$$

Oczywiście macierz $|\tau|^2 I - 2\operatorname{re}(\tau)A + A^2$ jest macierzą odwzorowania $S := |\tau|^2 E - 2\operatorname{re}(\tau)T + T^2$ względem baz $(\mathbb{E}, \mathbb{E})$. Ponieważ macierz ta ma zerowy wyznacznik, więc jądro odwzorowania S zawiera niezerowy wektor x. Stąd

$$T^2(x) = -|\tau|^2 x + 2\operatorname{re}(\tau)T(x). \tag{2}$$

Gdyby x i $T(x)$ były współliniowe, to istniałaby $\lambda \in \mathbb{R}$, że $T(x) = \lambda x$, co przeczyłoby naszemu przypuszczeniu, że T nie ma wektorów własnych. W takim razie przestrzeń liniowa W rozpięta na wektorach x, $T(x)$ jest dwuwymiarowa. Ponadto jeśli $w \in W$, to istnieją liczby α, $\beta \in \mathbb{R}$, że $w = \alpha x + \beta T(x)$. Stosując do obu stron tej równości odwzorowanie T i korzystając z (2) otrzymamy

$$T(w) = -\beta|\tau|^2 x + (\alpha + 2\beta \operatorname{re}\tau)T(x).$$

W rezultacie $T(w) \in W$. Co dowodzi, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania T. W konsekwencji, ograniczenie $T|W$ odwzorowania T do W jest endomorfizmem przestrzeni W. Endomoformizm ten jest oczywiście symetryczny. Niech $\mathbb{F} = (f_1, f_2)$ będzie jakąkolwiek uporzadkowaną bazą ortonormalną przestrzeni W i niech C oznacza macierz odwzorowania $T|W$ względem baz $(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Z uwagi 1 wynika, że C musi być macierzą symetryczną:

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

W takim razie wielomian charakterystyczny w_C macierzy C ma postać

$$w_C(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

Stąd jego wyróżnik $\Delta = (a-c)^2+4b^2$ jest nieujemny i wielomian w_C ma pierwiastki rzeczywiste. Niech κ będzie takim pierwiastkiem. Jak pamiętamy, musi on być wartością własną odwzorowania $T|W$. Co oznacza istnienie niezerowego wektora $w \in W$, że $T(w) = \kappa w$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność z naszym przypuszczeniem. □

Dowód twierdzenia 3. (indukcja ze względu na m – wymiar przestrzeni) Na podstawie lematu 4, istnieje wektor własny $x_1 \neq 0$ odwzorowania T o wartości własnej λ_1, to znaczy, $T(x_1) = \lambda_1 x_1$. Określmy $e_1 = \dfrac{x_1}{|x_1|}$ i $L = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Mamy $T(v) = \lambda_1 v$, dla każdego wektora $v \in L$, więc L jest jednowymiarową podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania T. Wykażemy teraz, że $L^\perp$ jest także podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania T.

Jeśli $x \in L^\perp$ zaś $v \in L$, to wykorzystując symetryczność T mamy

$$\langle T(x), v\rangle = \langle x, T(v)\rangle = \lambda_1\langle x, v\rangle = 0.$$

W rezultacie $T(x) \in L^\perp$, jak oczekiwaliśmy.

Odwzorowanie $T|L^\perp$ jest samosprzężone oraz, jak wynika ze stwierdzenia 2, $\dim L^\perp = m - 1$. Na mocy założenia indukcyjnego, istnieje baza ortonormalna $e_2, \ldots, e_m$ przestrzeni $L^\perp$ złożona z wektorów własnych, to znaczy

$$T(e_i) = \lambda_i e_i,$$

dla $i = 2, \ldots, m$ i odpowiednio dobranych λ_i. Ponieważ także $T(e_1) = \lambda_1$ i wektor e_1 jest ortogonalny do pozostałych wektorów e_i, więc $\mathbb{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ jest szukaną bazą. $\square$