Geometria. Hiperbola

Definicja 1 Dano dwa punkty na płaszczyźnie: F_1 i F_2 oraz taką liczbę d, że $|F_1F_2| > d > 0$. Zbiór punktów płaszczyzny będących rozwiązaniami równania:

$$|XF_1| - |XF_2| = \pm d.$$

nazywamy *hiperbolą*.

Uwaga 1 Właściwie zależność określająca hiperbolę jest parą równań: jedno z d, drugie z $-d$. Można jednak zrobić z nich jedno równanie przez podniesienie obu stron do kwadratu.

Przedstawię teraz rozwiązanie zadania z listy:

> Suma zbioru wszystkich prostych tworzących stożka kołowego tworzy zbiór złożony z pary stożków $S+$, $S-$ mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeśli płaszczyzna przecina oba stożki, ale ich wierzchołek nie leży na niej, to powstały przekrój jest hiperbolą.

Robię to dlatego, że łatwiej mi tu przedstawić czytelny rysunek 1. Ten na ćwiczeniach był odpowiedni, ale po skopiowaniu do zeszytów mógł się zrobić nieczytelny.

Przypomnijmy, że sfery wpisane w stożki S^+ (ten górny) i S^- (dolny) są tak dobrane, by były styczne do płaszczyzny przekroju. Punkty styczności to F_1, F_2. X – to dowolny punkt przekroju. Prosta tworząca przechodząca przez X (to znaczy, taka, która przechodzi jeszcze przez wspólny wierzchołek stożków) jest styczna do obu sfer wpisanych w punktach M_1 i M_2. Ponieważ wszystkie odcinki, leżące na prostych tworzących, o końcach w punktach styczności do pary sfer mają tę samą długość, więc istnieje liczba $d > 0$, niezależna od wyboru X, że $|M_1M_2| = d$. Dalej, wszystkie odcinki o wspólnym końcu, leżące na prostych stycznych do danej sfery, których drugim końcem jest punkt styczności mają też jednakową długość. Stąd $|XF_1| = |XM_1|$ i $|XF_2| = |XM_2|$. Nasz przekrój składa się z dwu gałęzi: górnej, zawartej w górnym stożku i dolnej. Gdy X leży tak jak na rysunku na górnej gałęzi, to zgodnie z ustalonymi równaniami mamy

$$|XF_1| - |XF_2| = |XM_1| - |XM_2| = |M_1M_2| = d.$$

Gdy leży na górnej gałęzi, to oczywiście $|XF_1| - |XF_2| = -d$.

Kanoniczne równanie hiperboli. Wyprowadzimy teraz równanie hiperboli nakładając na płaszczyznę kartezjański układ współrzędnych. Co oznacza, że równanie jest *kanoniczne* wyjaśnię przy innej okazji. Wyprowadzenie wykonaliśmy już na ćwiczeniach, ale tam nie potrafiłem się wytłumaczyć, dlaczego jeden ze współczynników jest dodatni i kazałem po prostu tak przyjąć. Teraz samo wyprowadzenie.

Układ współrzędnych uszykujmy tak, by ogniska leżały na osi Ox w równej odległości od początku układu: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Przyjmijmy, że współrzędne punktu X hiperboli to (x, y). Równanie hiperboli wyrażone we współrzędnych przyjmie postać

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \pm d,$$

gdzie $A = (x + c)^2 + y^2$, $B = (x - c)^2 + y^2$. Po podniesieniu stronami do kwadratu i uporządkowaniu dostaniemy:

$$A + B - d^2 = 2\sqrt{AB}.$$

Ponieważ $(A+B)^2 - 4AB = (A-B)^2$, więc po powtórnym podniesieniu do kwadratu:

$$(A - B)^2 - 2d^2(A + B) + d^4 = 0.$$

Zauważmy, że $A - B = 4cx$ a $A + B = 2(x^2 + y^2 + c^2)$. Po podstawieniu tych zależności do wyróżnionego równania:

$$16c^2x^2 - 4d^2(x^2 + y^2 + c^2) + d^4 = 0.$$

A stąd po uporządkowaniu i łatwych przekształceniach:

$$\frac{x^2}{(d/2)^2} - \frac{y^2}{c^2 - (d/2)^2} = 1.$$

Zgodnie z przyjętym założeniem, $2c = |F_1F_2| > d > 0$. W takim razie $c^2 - (d/2)^2 > 0$. Przymując oznaczenia $a = d/2$ i $b = \sqrt{c^2 - (d/2)^2}$, nasze równanie przyjmie postać

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

To jest właśnie kanoniczne równanie hiperboli. Łatwo zauważyć, że równanie hiperboli nie ma rozwiązań, gdy $x \in (-a, a)$. Gdy $x \in \{-a, a\}$ to $y = 0$, mamy zatem rozwiązania $(x, y) = (-a, 0)$ i $(x, y) = (a, 0)$; są to tak zwane *wierzchołki* hiperboli. Punkty na hiperboli o odciętych $x \geqslant a$ stanowią jedną z gałęzi hiperboli, a punkty o odciętych $x \leqslant -a$ – drugą. Oś Oy jest oczywiście osią symetrii hiperboli (podobnie Ox), zatem wystarczy zająć się przypadkiem $x > a$; przypadek $x < -a$ można zredukować do poprzedniego za pomocą rozważań geometrycznych. Jeśli zaś $x > a$, to mamy dwa rozwiązania i y możemy wyrazić jedną z zależności funkcyjnych:

$$y = -b\sqrt{\frac{x}{a^2} - 1}, \quad y = b\sqrt{\frac{x}{a^2} - 1}.$$

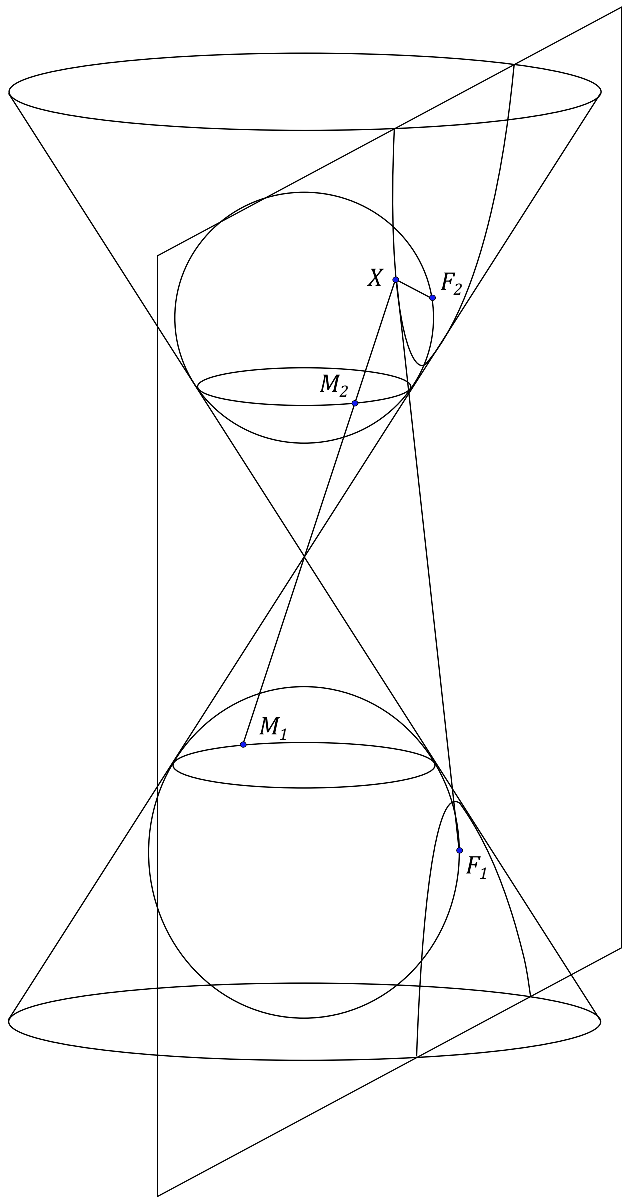
(Te same zależności funkcyjne mają miejsce, gdy $x < -a$.) Pierwsza z funkcji ma asymptotę ukośną $y = -\frac{bx}{a}$, a druga $y = \frac{bx}{a}$. Te same asymptoty ma druga gałąź. (Patrz rysunek 2.)

Uwaga 2 Na kolokwium należy znać wyprowadzenia z tej i pozostałych notatek. Trzeba umieć rozwiązać poniższe łatwe zadania:

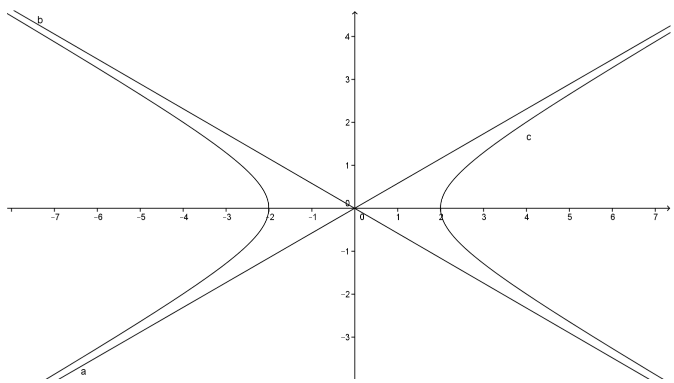
Zadanie 1. Wyznaczyć ogniska i asymptoty hiperbol: (a) $3x^2 - 2y^2 = 4$: (b) $-2x^2 + y^2 = 18$. Sporządzić szkice.

Zadanie 2. Wyznaczyć równanie hiperboli powstałej przez obrót hiperboli $x^2 - 4y^2 = 9$ o kąt $\pi/6$.

Zadanie 3. Wyznaczyć równanie hiperboli powstałej przez przesunięcie hiperboli $2x^2 - 3y^2 = 5$ o wektor $\boldsymbol{u} = (3, 5)$, a nstępnie jej obrót o kąt $\pi/2$ wokół początku układu.



Rysunek 1: Hiperbola jako stożkowa



Rysunek 2: Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ wraz z asymptotami; $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}/3$