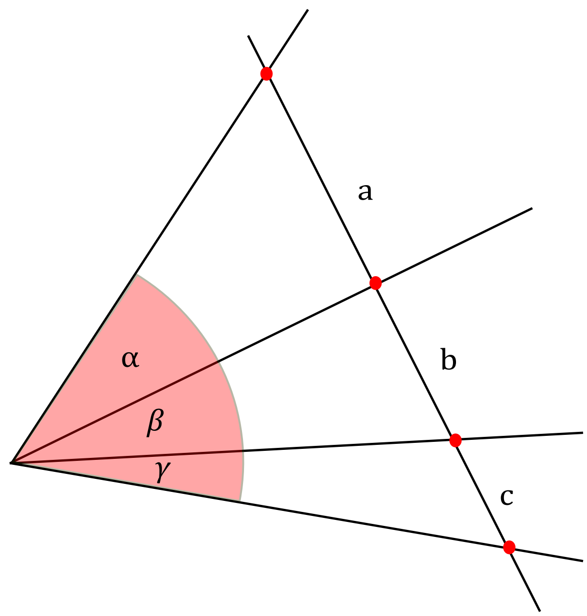
Geometria. Lista 1 (zadania z geometrii elementarnej)

Zadanie 1. **Dwustosunek.** (w: R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka 1998)

a) Niech α, β, γ oraz a, b, c będą takie jak na rysunku 1.



Rysunek 1:

Znaleźć (możliwie wszystkie) funkcje f i g, że zachodzi związek

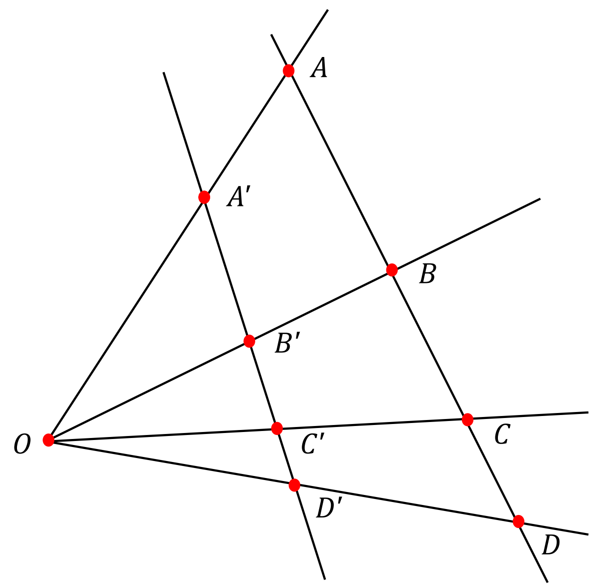
$$f(\alpha, \beta, \gamma) = g(a, b, c).$$

b) *Dwustosunkiem* czterech punktów współliniowych A, B, C, D nazywamy wielkość

$$(ABCD) = \frac{|CA|}{|CB|} : \frac{|DA|}{|DB|}.$$

Wykazać, że dwustosunek nie zmienia się przy rzutach środkowych i równoległych (por. rysunek 2). (Uwaga: jeśli na prostej wprowadzić układ współrzędnych (tzn. utożsamić ją z osią liczbową), to dwustosunek możemy określić tak:

$$(ABCD) = \frac{C - A}{C - B} : \frac{D - A}{D - B}.$$



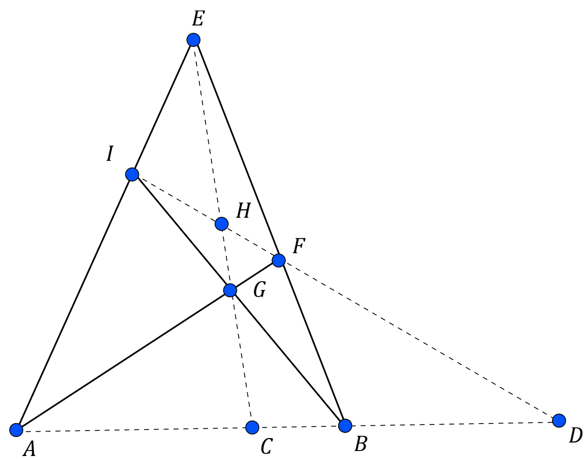
Rysunek 2: Rzut środkowy układu punktów na prostej

Określenia nie są tożsame, bo w drugim przypadku możemy, w zależności od wzajemnego położenia punktów A, B, C, D, otrzymać wartość ujemną. Obie wielkości są oczywiście równe z dokładnością do znaku. Kiedy otrzymamy wartość ujemną? Czy *znakowany* dwustosunek zachowa się przy rzutach?)

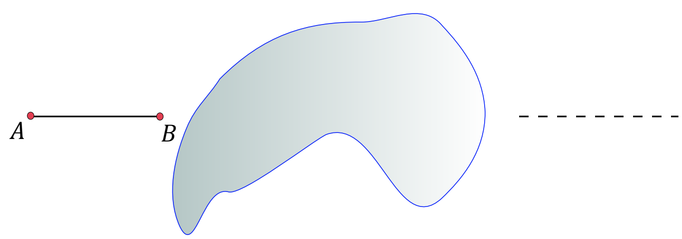
c) Przypiszmy czterem punktom na prostej etykiety A, B, C, D na wszystkie możliwe sposoby (jest ich 24, dlaczego?). Wykazać, że otrzymany w ten sposób zbiór dwustosunków przyjmuje jedynie sześć wartości.

d) **Czworobok zupełny.** Na płaszczyźnie dano cztery proste, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie; por. rysunek 3, gdzie proste są narysowane ciągłą linią; linie przerywane przedstawiają tzw. przekątne czworoboku. Wykazać, że $(ABCD) = -1$

e) Przypuśćmy, że za jeziorem chcemy wytyczyć drogę, której odcinek AB jest widoczny (por. rysunek 4). Chcemy, by nowowytyczony odcinek leżał na prostej wyznaczonej przez A, B. Cała konstrukcja musi przebiegać na suchym lądzie. Jak to zrobić? (Wskazówka: Posłuż się czworobokami zupełnymi.)



Rysunek 3: Czworobok zupełny



Rysunek 4: Tyczenie drogi

Zadanie 2. *Elipsą* nazywamy zbiór punktów X płaszczyzny, których suma odległości od dwu ustalonych punktów tej płaszczyzny O_1, O_2 zwanych *ogniskami* jest stała i większa niż odległość między ogniskami. Innymi słowy, elipsa jest zbiorem rozwiązań równania

$$|O_1X| + |O_2X| = d,$$

gdzie d jest ustaloną liczbą spełniającą nierówność $d > |O_1O_2|$.

a) Wykazać, że każda elipsa ma dwie wzajemnie prostopadłe osie symetrii.

b) Wykazać, że jeśli ograniczona figura płaska ma dwie prostopadłe osie symetrii, to ma także środek symetrii. Czy prostopadłość jest tutaj istotna? Wykazać jedyność tego środka.

c) Znaleźć równanie elipsy wprowadzając układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie i przyjmując , że jej ogniska leżą na osi Ox w tej samej odległości od początku układu. Wykazać, że każda krzywa zadana równaniem
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$
gdzie $a > 0$, $b > 0$ jest elipsą o środku w $O(0,0)$ i ogniskach leżących bądź na osi Ox bądź Oy.

d) Napisać równanie elipsy z jednym ogniskiem w $O(0,0)$ i drugim na osi Ox.

e) Wykazać, że jeśli E jest elipsą na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych Oxy, której środek leży w początku układu, to istnieje izomorfizm liniowy $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, że E jest obrazem okręgu jednostkowego o środku w $(0,0)$ w tym odwzorowaniu. Wykazać, że obrazem elipsy w izomorfiźmie liniowym jest znowu elipsa. (Wykorzystaj dodatek o rozkładzie macierzy.)

f) Wykazać, że przecinając powierzchnię walca kołowego płaszczyzną niezawierającą prostych równoległych do tworzących walca otrzymamy elipsę. Czy podobne twierdzenie zachodzi dla stożka kołowego?

g) Dwie płaszczyzny przecinają się pod kątem α. Na jednej z nich mamy okrąg o promieniu r, który rzutujemy równolegle na drugą. Kierunek rzutu jest prostopadły do płaszczyzny rzutowanej. Rzut okręgu jest oczywiście elipsą. Jak jest odległość między jej ogniskami, ile wynosi wartość c?

h)* Niech E będzie elipsą i niech O będzie punktem leżącym poza tą płaszczyzną. Zbiór punktów leżących na prostych przechodzących przez O i E nazywamy *stożkiem eliptycznym* o wierzchołku w O; wspomniane proste nazywamy tworzącymi stożka. Wykazać, że część wspólna stożka eliptycznego i płaszczyzny niezawierającej O, przecinającej wszystkie tworzące tego stożka jest elipsą.

i) W przestrzeni z wprowadzonym układem współrzędnych $Oxyz$ zadano za jego pośrednictwem okrąg $y^2+z^2 = 1$, $x = 0$ oraz punkt $P(-1, 0, c)$. Następnie zrzutowano ten okrąg na płaszczyznę Oxy za pomocą rzutu środkowego o środku P. Wyznacz równanie otrzymanego zbioru.

Dodatek. Rozkład macierzy.

Niech A macierz 2×2. Wykazać, że istnieje para obrotów R_φ, R_ψ, że macierz $B = R_\psi A R_\varphi$ ma postać przekątniową. (Tym samym symbolem R_φ oznaczyliśmy i obrót, i jego macierz w bazie standardowej.)

Dowód. Przypomnijmy, że

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Dalej, zastosujemy następujące oznaczenia: $\mathrm{s}_\varphi = \sin\varphi$, $\mathrm{c}_\varphi = \cos\varphi$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Musimy wykazać, że istnieją kąty φ, ψ, że $f = g = 0$. Łatwo wyrachować, że

$$\begin{aligned} f &= (b\,\mathrm{c}_\varphi - a\,\mathrm{s}_\varphi)\,\mathrm{c}_\psi + (-d\,\mathrm{c}_\varphi + c\,\mathrm{s}_\varphi)\,\mathrm{s}_\psi \\ g &= (c\,\mathrm{c}_\varphi + d\,\mathrm{s}_\varphi)\,\mathrm{c}_\psi + (a\,\mathrm{c}_\varphi + b\,\mathrm{s}_\varphi)\,\mathrm{s}_\psi \end{aligned}$$

Powyższe równania możemy przepisać w postaci pojedynczego równania wektorowego:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\,\mathrm{c}_\varphi - a\,\mathrm{s}_\varphi & -d\,\mathrm{c}_\varphi + c\,\mathrm{s}_\varphi \\ c\,\mathrm{c}_\varphi + d\,\mathrm{s}_\varphi & a\,\mathrm{c}_\varphi + b\,\mathrm{s}_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\psi \\ \mathrm{s}_\psi \end{bmatrix}.$$

Niech

$$C_\varphi := \begin{bmatrix} b\,\mathrm{c}_\varphi - a\,\mathrm{s}_\varphi & -d\,\mathrm{c}_\varphi + c\,\mathrm{s}_\varphi \\ c\,\mathrm{c}_\varphi + d\,\mathrm{s}_\varphi & a\,\mathrm{c}_\varphi + b\,\mathrm{s}_\varphi \end{bmatrix}$$

Niech $h(\varphi) := \det C_\varphi$. Jak łatwo zauważyć, $h(0) = ab + cd$ oraz $h(\pi/2) = -ab - cd = -h(0)$. Ponieważ h jest funkcją ciągłą, to musi istnieć wartość $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$, że $h(\varphi_0) = 0$. W takim razie C_{φ_0} zadaje odwzorowanie liniowe o niepustym jądrze, to znaczy, istnieje wektor $\boldsymbol{v}$ różny od zera, że $C_{\varphi_0}\boldsymbol{v} = (0, 0)$. Oczywiście, jeśli $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$, to także $C_{\varphi_0}\boldsymbol{u} = (0, 0)$. Ponieważ $\boldsymbol{u}$ ma długość 1, więc istnieje liczba $\psi_0 \in [0, 2\pi)$, że $\boldsymbol{u} = (\mathrm{c}_{\psi_0}, \mathrm{s}_{\psi_0})$. Oczywiście liczby $\varphi = \varphi_0$ oraz $\psi = \psi_0$ są szukanymi, to znaczy tymi, przy których f i g się zerują i macierz B staje się przekątniowa.