Geometria. Lista 2

Zadanie 1. Posługując się parametryzacją biegunową okręgu $x^2 + y^2 = 1$ i faktem, że elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ jest obrazem tego okręgu w powinowactwie osiowym wyznaczyć parametryzację elipsy.

Zadanie 2. Wyznaczyć równanie stycznej do elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ w dowolnym jej punkcie $X(x, y)$.

Zadanie 3. (Bilard eliptyczny) Wyobraźmy sobie punkt poruszający się prostoliniowo wewnątrz elipsy. Kiedy dociera on do brzegu elipsy w punkcie X, to odbija się w X tak, jakby odbijał się od stycznej do elipsy w tym punkcie i dalej, aż do następnego odbicia, porusza się ruchem prostoliniowym. Powstały w ten sposób tor ruchu jest łamaną. Wykazać, że jeśli jedno z ogniw tej łamanej przechodzi przez ognisko elipsy, to kolejne także (oczywiście ogniska moga być różne!).

Zadanie 4. Wykazać, że każda para punktów i prosta nieprzecinająca odcinka o końcach w tych punktach wyznaczają jednoznacznie elipsę, dla której punkty te są ogniskami, zaś prosta jest prostą styczną.

Zadanie 5. Dla pary wektorów $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ określmy ich iloczyn wzorem

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = \frac{u_1 v_1}{a^2} + \frac{u_2 v_2}{b^2}.$$

Wykazać, że tak określony iloczyn, jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$. Wykazać, że okrąg jednostkowy $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 1$ względem tak określonego iloczynu jest elipsą E będącą obrazem "zwykłego" okręgu $x^2 + y^2 = 1$ w odwzorowaniu liniowym $T(x, y) = (ax, by)$. Podać konstruktywny sposób na wyznaczenie prostej prostopadłej do zadanej prostej w odniesieniu do prostopadłości określonej przez ten iloczyn.

Parabolą nazywamy zbiór punktów płaszczyzny równoodległych od ustalonej prostej k zwanej *kierownicą* i punktu F nie leżącego na tej prostej zwanego *ogniskiem*. Równanie paraboli:

$$d(X, k) = |XF|.$$

Zadanie 6. Znaleźć równanie paraboli o ognisku $F(c, 0)$ i kierownicy k danej równaniem $x = -c$. Zakładamy, że $c > 0$.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli punkt wewnątrz paraboli porusza się w kierunku kierownicy i do niej prostopadle, to po odbiciu od paraboli przejdzie przez jej ognisko. Zjawisko to jest wykorzystane w zwierciadłach parabolicznych. Wytłumacz to.

Zadanie 8. Wyznacz ognisko i kierownicę paraboli $y = x^2$.

Hiperbolą nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których różnica odległości od pary ustalonych punktów F_1, F_2 zwanych ogniskami jest stała z dokładnością do znaku i niezerowa. Równanie hiperboli:

$$|XF_1| - |XF_2| = \pm a, \quad a > 0.$$

Jak nietrudno zauważyć, hiperbola składa się z dwu rozłącznych krzywych zwanych *gałęziami*. Gałęzie dane są równaniami $|XF_1| - |XF_2| = a$, $|XF_1| - |XF_2| = -a$.

Zadanie 9. Suma zbioru wszystkich prostych tworzących stożka kołowego tworzy zbiór złożony z pary stożków $S+$, $S-$ mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeśli płaszczyzna przecina oba stożki, ale ich wierzchołek nie leży na niej, to powstały przekrój jest hiperbolą.

I podsumowanie nauki o stożkowych:

Zadanie 10. Udowodnić, że zbiór rozwiązań $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dowolnego równania postaci:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

gdzie a, b, c, d, e, f – stałe rzeczywiste. Jest albo hiperbolą, albo parabolą, albo elipsą (okrąg uważamy za szczególną elipsę), albo parą przecinających sią prostych, albo prostą, albo punktem, albo zbiorem pustym.

Zadanie 11. Niech S – izometria płaszczyzny. Niepusty podzbiór A płaszczyzny nazywamy *niezmienniczym* ze względu na S, jeśli $S(A) = A$. Punkt X nazywamy *punktem stałym* izometrii S, jeśli $S(X) = X$

Zadanie 12. Opisać wszystkie izometrie płaszczyzny, które

a) mają co najmniej dwa punkty stałe;

b) mają dokładnie jeden punkt stały;

c) nie mają punktów stałych, ale mają właściwy podzbiór niezmienniczy;

d) nie mają ani punktów stałych ani właściwych podzbiorów niezmienniczych. Czy potrafisz sobie wyobrazić podobny opis w przypadku przestrzeni (trójwymiarowej)?