Izometrie liniowe

Przypomnijmy, że jeśli V jest przestrzenią euklidesową (skończonego wymiaru), to $U \in \operatorname{End} V$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy $U^*U = UU^* = E$, to znaczy, gdy jest odwzorowaniem *ortogonalnym*. Naszym zadaniem będzie opisanie struktury odwzorowań ortogonalnych. Zacznijmy od przykładów.

Przykład 1 Przypomnijmy, że mnożenie liczb zepolonych ma prostą interpretację geometryczną. Mianowicie, odwzorowanie $z \mapsto e^{\mathrm{i}\varphi}z = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)z$, jeśli $\mathbb{C}$ utożsamić z płaszczyzną z naniesionym układem kartezjańskim, to znaczy z $\mathbb{R}^2$, za pomocą odpowiedniości $z = x + \mathrm{i}\,y \leftrightarrow (x, y)$, jest obrotem tej płaszczyzny o kąt φ względem początku układu. (Kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara jest dodatni.) Wyraźmy ten obrót jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$. Niech

$$z' = x' + \mathrm{i}\,y' := e^{\mathrm{i}\varphi}z.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x' + \mathrm{i}\,y' &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(x + \mathrm{i}\,y) \\ &= (x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \mathrm{i}(y\cos\varphi + x\sin\varphi). \end{aligned}$$

W rezultacie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Teraz, przez analogię, możemy rozszerzyć pojęcie obrotu na dowolną dwuwymiarową przestrzenią euklidesową. Przypuśćmy, że W jest taką przestrzenią i niech $\mathbf{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ oznacza reper ortonormalny tej przestrzeni. *Obrotem* o kąt φ przestrzeni W względem początku układu nazywamy odwzorowanie $U_\varphi \in \operatorname{End} W$, którego macierz B w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Oczywiście U_φ jest odwzorowaniem ortogonalnym, bo jak łatwo sprawdzić $BB^\mathsf{T} = I$. Odwzorowania U_φ, $\varphi \in \mathbb{R}$, tworzą oczywiście grupę przemienną. Jej elementem neutralnym jest $I = U_0$. Mnożeniu elementów odpowiada dodawanie kątów: $U_\varphi U_\theta = U_{\varphi+\theta}$. Elementem odwrotnym do U_φ jest $U_{-\varphi}$. Obrót jest przykładem izometrii nazywanych *ruchami sztywnymi*. Jeśli K

jest dowolnym podzbiorem przestrzeni W, to przekształcenie K na izometryczną kopię $U_\varphi(K)$ można zrealizować przechodząc stopniowo po wszystkich kątach od 0 do φ. Gdybyśmy wszystkie fazy tego przejścia sfilmowali, to zaobserwowalibyśmy ruch zbioru od położenia początkowego K do końcowego $U_\varphi(K)$. Zauważmy na zakończenie, że $\det U_\varphi = \det B = 1$.

Przykład 2 Niech X oznacza podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru V. Wybierzmy reper ortonormalny $\mathbf{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ w V w ten sposób, by wektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ tworzyły bazę przestrzeni X. (Jeśli $X = \{0\}$, to takich wektorów po prostu nie ma.) Określmy odwzorowanie M_X przestrzeni V w siebie wzorem:

$$\begin{aligned} M_X(\boldsymbol{x}) &= M_X(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1\rangle \boldsymbol{e}_1 + \cdots \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k\rangle \boldsymbol{e}_k + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{k+1}\rangle \boldsymbol{e}_{k+1} + \cdots + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle \boldsymbol{e}_n) \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1\rangle \boldsymbol{e}_1 + \cdots \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k\rangle \boldsymbol{e}_k - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_{k+1}\rangle \boldsymbol{e}_{k+1} - \cdots - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n\rangle \boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

M_X nazywamy *odbiciem* przestrzeni V w przestrzeni X albo odbiciem względem X. Łatwo zauważyć, że $M_X|X = E|X$ oraz $M_X|X^\perp = -E|X^\perp$. M_X jest oczywiście odwzorowaniem ortogonalnym. Czytelnik jest proszony o uzasadnienie, że $M_X = M_X^*$ oraz $M_X^2 = E$. A także o zauważenie, że $\det M_X = (-1)^{\dim X^\perp}$.

W przypadku, gdy $X = \{0\}$, to M_X nazywamy też odbiciem względem zera. Gdy $V = \mathbb{R}^2$, to odbicie względem zera jest obrotem o kąt $\varphi = \pi$. Tak jest zresztą w każdej przestrzeni euklidesowej dwuwymiarowej. Gdy zaś $V = \mathbb{R}^2$ oraz $\dim X = 1$, to X jest geometrycznie prostą przechodzącą przez początek układu, zaś M_X symetrią osiową względem tej prostej.

Twierdzenie 1 *Niech V będzie przestrzenią euklidesową skończonego wymiaru n. Jeśli $U\colon V \to V$ jest odwzorowaniem ortogonalnym, to istnieje rozkład $V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_m$ przestrzeni V na podprzestrzenie wzajemnie ortogonalne o wymiarach 1 i 2, że gdy*

(1) $\dim V_i = 1$, *to* $U|V_i = E|V_i$ *względnie* $U|V_i = -E|V_i$;

(2) $\dim V_i = 2$, *to* $U|V_i$ *jest obrotem o kąt* φ, *różny od krotności liczby* π.

Jeśli wybrać w każdej z przestrzeni V_i bazę ortonormalną, to z takich baz można zestawić reper ortonormalny $\mathbf{f}$ *przestrzeni V, że macierz odwzorowa-*

nia U w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

(Oczywiście niektóre z bloków mogą nie wystąpić.)

Dowód. Mogą się zdarzyć dwie sytuacje: (1) U ma wartość własną, (2) U nie ma takiej wartości. Fakt, że zachodzi (1) oznacza, iż istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektor niezerowy $\boldsymbol{x}$, że $U\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Ponieważ

$$|\boldsymbol{x}| = |U\boldsymbol{x}| = |\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}|,$$

więc $\lambda = 1$ lub -1. Niech $W = \{\alpha\boldsymbol{x} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. W jest oczywiście podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania U. Niech $W^\perp$ – dopełnienie ortogonalne przestrzeni W i niech v – element tego dopełnienia. Ponieważ U zachowuje iloczyn skalarny, więc

$$\lambda\langle \boldsymbol{x}, U\boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{v}\rangle = \langle U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle = 0.$$

Stąd wektor $U\boldsymbol{v}$ jest ortogonalny do $\boldsymbol{x}$, więc należy do $W^\perp$. W rezultacie V rozkłada się na sumę $W \boxplus W^\perp$ ortogonalnych podprzestrzeni niezmienniczych odwzorowania U, przy czym W jest jednowymiarowa i $U|W = \pm E|W$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (2). Rozpatrzmy macierz B odwzorowania U w bazach $(\mathbf{e}, \mathbf{e})$, gdzie $\mathbf{e}$ jest dowolnym reperem ortonormalnym przestrzeni V. Niech λ będzie pierwiastkiem równania charakterystycznego $\det(\lambda I - B) = 0$. Liczba ta nie może być rzeczywista, bo w przeciwnym razie U miałoby wektor własny. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy mamy

$$0 = \det((\lambda I - B)(\bar{\lambda} I - B)) = \det(|\lambda|^2 - 2(\operatorname{re}\lambda)B + B^2).$$

W takim razie odwzorowanie $T = |\lambda|^2 - 2(\mathrm{re}\,\lambda)U + U^2$ ma nietrywialne jądro, to znaczy, istnieje niezerowy $\boldsymbol{x} \in V$, że $T\boldsymbol{x} = 0$. Rozpatrzmy podprzestrzeń $W < V$ rozpiętą na wektorach $\boldsymbol{x}$ i $U\boldsymbol{x}$. Ponieważ

$$\begin{aligned} U(\alpha\boldsymbol{x} + \beta U\boldsymbol{x}) &= \alpha U\boldsymbol{x} + \beta U^2\boldsymbol{x} = \alpha U\boldsymbol{x} + \beta(2(\mathrm{re}\,\lambda)U\boldsymbol{x} - |\lambda|^2\boldsymbol{x}) \\ &= -\beta|\lambda|^2\boldsymbol{x} + (\alpha + 2\beta\,\mathrm{re}\,\lambda)U\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

więc W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zauważmy, że wobec tego, iż $|U\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ oraz $U\boldsymbol{x} \neq \pm\boldsymbol{x}$ (zakładamy, że U nie ma wartości i co za tym idzie, wektorów własnych !), wektory $\boldsymbol{x}$ oraz $U\boldsymbol{x}$ tworzą bazę przestrzeni W. Przestrzeń ta jest więc dwuwymiarowa. Niech $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ tworzą reper ortonormalny tej przestrzeni i niech C będzie macierzą odwzorowania $U|W$ w bazach $(\mathbf{w}, \mathbf{w})$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Macierz C jest ortogonalna, co oznacza, że wektory wierszowe tworzą bazę ortonormalną. W szczególności, $c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$, co oznacza, że istnieje jedyna taka liczba $\varphi \in [0, 2\pi)$, że $(c_{21}, c_{22}) = (\sin\varphi, \cos\varphi)$. Ponieważ do danego wektora niezerowego w $\mathbb{R}^2$ można dobrać tylko dwa wektory jednostkowe i prostopadłe (różnią się one jedynie znakiem), więc mamy dwie możliwości: $(c_{11}, c_{12}) = (\cos\varphi, -\sin\varphi)$, względnie $(c_{11}, c_{12}) = (-\cos\varphi, \sin\varphi)$. ta druga możliwość jest wykluczona, bo implikowałaby $\det C = -1$. W takim jednak przypadku, równanie charakterystyczne $\det(\lambda I - C)$ ma rozwiązanie rzeczywiste (sprawdź to), co implikowałoby istnienie wektorów własnych odwzorowania $U|W$, a co za tym idzie, także U. Wtedy jednak U miałoby wartości własne, co przeczyłoby naszemu założeniu. W konsekwencji, C jest macierzą obrotu w przestrzeni W, tzn. $U|W = U_\varphi$. Weźmy teraz dowolną parę wektorów $\boldsymbol{x} \in W$ oraz $\boldsymbol{y} \in W^\perp$ Ponieważ $U|W$ jest izomorfizmem przestrzeni W, więc istnieje $\boldsymbol{x}' \in W$, że $U\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Zauważmy, że

$$\langle \boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y} \rangle = \langle U\boldsymbol{x}', U\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y} \rangle = 0.$$

Co wobec dowolności wyboru $\boldsymbol{x} \in W$ przesądza, iż obok W także $W^\perp$ jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania U. I tak jak w (1), $V = W \boxplus W^\perp$, gdzie tym razem W jest przestrzenią dwuwymiarową , na której U działa jako obrót.

W ten sposób wykonaliśmy pierwszy krok rozkładu przestrzeni V na prostopadłe składniki jedno- i dwuwymiarowe, o których mowa w tezie. Dalej należy przyjąć $V_1 = W$ i cała procedurę powtórzyć w odniesieniu do przestrzeni niższego wymiaru $W^\perp$ i odwzorowania $U|W^\perp$, które należy do $O(W^\perp)$. Wobec tego, że wymiar V jest skończony, po skończonej liczbie kroków otrzymamy żądany rozkład. $\square$

Zadanie 1 Korzystając z twierdzenia udowodnić, że każde odwzorowanie ortogonalne można przestawić jako złożenie skończonej liczby odbić M_X w podprzestrzeniach X wymiaru o jeden mniejszego niż wymiar przestrzeni V.

Ruchy sztywne

O ruchach sztywnych już wspominaliśmy, teraz czas na formalną definicję.

Definicja 1 *Ruchem sztywnym* w przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru V nazywamy każde odwzorowanie $U \in O(V)$, że $\det U = 1$.

Powyższą definicję możemy uzasadnić w następujący sposób: Niech $U \in O(V)$ i niech $V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_m$ będzie rozkładem V na podprzestrzenie niezmiennicze odwzorowania U, opisanym w twierdzeniu. Wówczas

$$\det U = \prod_{i=1}^{m} \det(U|V_i),$$

co można wywnioskować z przedstawienia macierzowego odwzorowania U. Oczywiście, jeśli $U|V_i$ jest obrotem, to $\det(U|V_i) = 1$. W konsekwencji, $\det U = (-1)^s$, gdzie s oznacza liczbę tych jednowymiarowych przestrzeni V_i, że $U|V_i = -E|V_i$. Jeśli $\det U = 1$, to liczba s jest parzysta. Wtedy wspomniane przestrzenie jednowymiarowe można podzielić na pary. Niech V_j, V_k będzie taką parą. Wtedy $U|(V_j \boxplus V_k) = -E|(V_j \boxplus V_k)$, ale odwzorowanie *minus identyczność* ma w dowolnych bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ przestrzeni dwuwymiarowej $V_j \boxplus V_k$ macierz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jeśli $\mathbf{f}$ jest reperem ortonormalnym, to macierz ta jest macierzą obrotu U_π o kąt π. W takim razie, gdy $\det U = 1$, to V możemy rozłożyć na podprzestrzenie $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_l \boxplus W$, że ograniczenie $U|W_i$, $i = 1, \ldots l$, jest obrotem U_{φ_i}, zaś ograniczenie $U|W$ jest identycznością. Określmy teraz odwzorowania $U_{(t)}$, $t \in [0, 1]$, w ten sposób, że $U_{(t)}|W_i = U_{t\varphi_i}$ oraz $U_{(t)}|W$ jest identycznością na W. Oczywiście $U_{(t)}$ są ortogonalne $U_{(0)} = E$ oraz $U_{(1)} = U$ a zatem każdy zbiór $K \subset V$ możemy w sposób płynny przeprowadzić na izometryczną kopię $U(K)$. Ruch zbioru K możemy zrealizować jako przekształcenie $[0,1] \ni t \mapsto U_{(t)}(K)$. Z drugiej strony, jeśli U jest takim odwzorowaniem ortogonalnym, że istnieje ciągła rodzina przekształceń $U_{(t)} \in O(V)$, $t \in [a,b]$, że $U_{(a)} = E$ oraz $U_{(b)} = U$, to ponieważ $\det U_{(t)}$ może przyjmować tylko wartości ± 1 oraz $\det U_{(a)} = \det E = 1$ i funkcja $t \mapsto \det U_{(t)}$ jest ciągła, więc musi być stale równa 1. W rezultacie $\det U = \det U_{(b)} = 1$. (Nie dbałem tutaj o zbytnią dokładność, nie sprecyzowałem np. co znaczy pojęcie *ciągła rodzina przekształceń*.)

Z ruchami sztywnymi powiązane jest pojęcie orientacji.

Orientacja

Definicja 2 Powiemy, że dwa repery ortonormalne $\mathbf{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $\mathbf{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ wyznaczają tę samą *orientację* przestrzeni euklidesowej V, jeśli odwzorowanie liniowe U, które przeprowadza reper $\mathbf{e}$ na $\mathbf{f}$, tzn. $U\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$, $i = 1, \ldots, n$, ma wyznacznik 1.

Zauważmy, że U określone powyżej należy do $O(V)$ (dlaczego?), jest zatem ruchem sztywnym. Łatwo spostrzec, że mamy tylko dwie orientacje. Mianowicie, jeśli ustalić $\mathbf{e}$, to wszystkie pozostałe repery ortonormalne są dwóch typów: te, dla których $\det U = 1$ i te, dla których $\det U = -1$. Wszystkie repery tego samego typu wyznaczają tę samą orientację, a różnego – inną. Definicja orientacji ma prostą interpretację geometryczną. Obierzmy punkt w otaczającej przestrzeni i przyjmijmy, że przedstawia on początek układu. Weźmy dwa trójnogi o równych i prostopadłych krawędziach, że ich narożniki spoczywają w początku. Pomalujmy krawędzie każdego trójnogu tymi samymi trzema barwami, np. żółtą, niebieską i czerwoną, po jednej barwie na krawędź. Trójnogi te reprezentują repery, kolory możemy traktować jak numery. Dwa trójnogi wyznaczają tę samą orientację, jeśli jeden możemy przemieści na drugi, tak by kolory się zgadzały.