Izometrie liniowe

Przypomnijmy, że jeśli V jest przestrzenią euklidesową, to $S \in \operatorname{End} V$ jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $S^*S = SS^* = I$, to znaczy, gdy jest odwzorowaniem *ortogonalnym*. Naszym zadaniem będzie opisanie struktury odwzorowań ortogonalnych. Zacznijmy od przykładów.

Przykład 1 Przypomnijmy, że mnożenie liczb zepolonych ma prostą interpretację geometryczną. Mianowicie, odwzorowanie $z \mapsto e^{\mathrm{i}\,\varphi} z = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)z$, jeśli $\mathbb{C}$ utożsamić z płaszczyzną z naniesionym układem kartezjańskim, to znaczy z $\mathbb{R}^2$, za pomocą odpowiedniości $z = x + \mathrm{i}\,y \leftrightarrow (x, y)$, jest obrotem tej płaszczyzny o kąt φ względem początku układu. (Kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara jest dodatni.) Wyraźmy ten obrót jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$. Niech

$$z' = x' + \mathrm{i}\,y' := e^{\mathrm{i}\,\varphi} z.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x' + \mathrm{i}\,y' &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(x + \mathrm{i}\,y) \\ &= (x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \mathrm{i}(y\cos\varphi + x\sin\varphi). \end{aligned}$$

W rezultacie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Teraz, przez analogię, możemy rozszerzyć pojęcie obrotu na dowolną dwuwymiarową przestrzeń euklidesową. Przypuśćmy, że W jest taką przestrzenią i niech $\mathbb{F} = (f^1, f^2)$ oznacza uporządkowaną bazę ortonormalną tej przestrzeni. *Obrotem* o kąt φ przestrzeni W względem początku układu nazywamy odwzorowanie liniowe $R_\varphi \colon W \to W$, którego macierz B względem pary baz uporzadkowanych $(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Oczywiście R_φ jest odwzorowaniem ortogonalnym, bo jak łatwo sprawdzić $BB^\mathsf{T} = I$. Odwzorowania R_φ, $\varphi \in \mathbb{R}$, tworzą oczywiście grupę przemienną. Jej elementem neutralnym jest $I = R_0$. Mnożeniu elementów odpowiada dodawanie kątów: $R_\varphi R_\theta = R_{\varphi+\theta}$. Elementem odwrotnym do R_φ jest $R_{-\varphi}$.

Obrót jest przykładem izometrii nazywanych *ruchami sztywnymi*: Jeśli K jest dowolnym podzbiorem przestrzeni W, to przekształcenie K na izometryczną kopię $R_\varphi(K)$ można zrealizować przechodząc stopniowo (w sposób ciagły) po wszystkich kątach od 0 do φ. Gdybyśmy wszystkie fazy tego przejścia sfilmowali, to zaobserwowalibyśmy ruch zbioru od położenia początkowego K do końcowego $R_\varphi(K)$. Zauważmy na zakończenie, że $\det R_\varphi = \det B = 1$.

PRZYKŁAD 2 Niech X oznacza podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru V. Wybierzmy uporządkowaną bazę ortonormalną $\mathbb{E} = (e^1, \ldots, e^k, e^{k+1}, \ldots, e^n)$ w V w ten sposób, by wektory $e^1, \ldots, e^k$ tworzyły bazę przestrzeni X. (Jeśli $X = \{0\}$, to takich wektorów po prostu nie ma.) Określmy odwzorowanie M_X przestrzeni V w siebie wzorem:

$$\begin{aligned} M_X(x) &= M_X(\langle x, e^1\rangle e^1 + \cdots + \langle x, e^k\rangle e^k + \langle x, e^{k+1}\rangle e^{k+1} + \cdots + \langle x, e^n\rangle e^n) \\ &= \langle x, e^1\rangle e^1 + \cdots + \langle x, e^k\rangle e^k - \langle x, e^{k+1}\rangle e^{k+1} - \cdots - \langle x, e^n\rangle e^n \end{aligned}$$

M_X nazywamy *odbiciem* przestrzeni V w przestrzeni X albo odbiciem względem X. Łatwo zauważyć, że $M_X|X = I|X$ oraz $M_X|X^\perp = -I|X^\perp$. M_X jest oczywiście odwzorowaniem ortogonalnym. Czytelnik jest proszony o uzasadnienie, że $M_X = M_X^*$ oraz $M_X^2 = I$. A także o zauważenie, że $\det M_X = (-1)^{\dim X^\perp}$. Odnotujmy jeszcze, że jeśli P jest projekcją ortogonalną na X, to

$$M_X = P - (I - P) = P - P^\perp.$$

W przypadku, gdy $X = \{0\}$, to M_X nazywamy też odbiciem względem zera. Gdy $V = \mathbb{R}^2$, to odbicie względem zera jest obrotem o kąt $\varphi = \pi$. Tak jest zresztą w każdej przestrzeni euklidesowej dwuwymiarowej. Gdy zaś $V = \mathbb{R}^2$ oraz $\dim X = 1$, to X jest geometrycznie prostą przechodzącą przez początek układu, zaś M_X symetrią osiową względem tej prostej.

UWAGA 1 Przypuśćmy, że $V_1, \ldots, V_k$ są wzajemnie prostopadłymi podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V, to znaczy, każda para wektorów $x \in V_i, y \in V_j$, gdzie $i \neq j$, jest prostopadła. Wówczas sumę $V_1 + \cdots + V_k$ będziemy zapisywać jako $V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_k$.

TWIERDZENIE 1 *Niech V będzie przestrzenią euklidesową skończonego wymiaru n. Jeśli $S\colon V \to V$ jest odwzorowaniem ortogonalnym, to istnieje rozkład $V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_m$ przestrzeni V na podprzestrzenie wzajemnie ortogonalne o wymiarach 1 i 2, że gdy*

(1) $\dim V_i = 1$, *to* $S|V_i = I|V_i$ *względnie* $S|V_i = -I|V_i$*;*

(2) $\dim V_i = 2$, *to* $S|V_i$ *jest obrotem o kąt* φ*, różny od krotności liczby* π*.*

Jeśli wybrać w każdej z przestrzeni V_i *bazę ortonormalną, to z takich baz można zestawić uporządkowaną bazę ortonormalną* $\mathbb{F}$ *przestrzeni* V*, że macierz odwzorowania* S *względem pary baz* $(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ *ma postać*

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

(Oczywiście niektóre z bloków mogą nie wystąpić.)

Dowód. Mogą się zdarzyć dwie sytuacje: (1) S ma wartość własną, (2) S nie ma takiej wartości. Fakt, że zachodzi (1) oznacza, iż istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektor niezerowy x, że $S(x) = \lambda x$. Ponieważ

$$\|x\| = \|S(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

więc $\lambda = 1$ lub -1. Niech $W = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$. W jest oczywiście podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania S. Niech $W^\perp$ – dopełnienie ortogonalne przestrzeni W i niech v – element tego dopełnienia. Ponieważ S zachowuje iloczyn skalarny, więc

$$\lambda\langle x, S(v)\rangle = \langle \lambda x, S(v)\rangle = \langle S(x), S(v)\rangle = \langle x, v\rangle = 0.$$

Stąd wektor $S(v)$ jest ortogonalny do x, więc należy do $W^\perp$. W rezultacie V rozkłada się na sumę $W \boxplus W^\perp$ ortogonalnych podprzestrzeni niezmienniczych odwzorowania S, przy czym W jest jednowymiarowa i $S|W = \pm I|W$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (2). Rozpatrzmy macierz B odwzorowania S względem pary baz uporządkowanych $(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, gdzie $\mathbb{E}$ jest dowolną uporządkowaną bazą ortonormalną przestrzeni V. Niech λ będzie pierwiastkiem równania charakterystycznego $\det(\lambda I - B) = 0$. Liczba ta nie może być rzeczywista, bo w przeciwnym razie S miałoby wektor własny. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy mamy

$$0 = \det((\lambda I - B)(\bar{\lambda} I - B)) = \det(|\lambda|^2 - 2(\operatorname{re}\lambda)B + B^2).$$

W takim razie odwzorowanie $T = |\lambda|^2 I - 2(\operatorname{re}\lambda)S + S^2$ ma nietrywialne jądro, to znaczy, istnieje niezerowy $x \in V$, że $T(x) = 0$. Rozpatrzmy podprzestrzeń $W < V$ rozpiętą na wektorach x i $S(x)$. Ponieważ

$$\begin{aligned} S(\alpha x + \beta S(x)) &= \alpha S(x) + \beta S^2(x) = \alpha S(x) + \beta(2(\operatorname{re}\lambda)S(x) - |\lambda|^2 x) \\ &= -\beta|\lambda|^2 x + (\alpha + 2\beta \operatorname{re}\lambda)S(x), \end{aligned}$$

więc W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zauważmy, że wobec tego, iż $\|S(x)\| = \|x\|$ oraz $S(x) \neq \pm x$ (zakładamy, że S nie ma wartości i co za tym idzie, wektorów własnych !), wektory x oraz $S(x)$ tworzą bazę przestrzeni W. Przestrzeń ta jest więc dwuwymiarowa. Niech $\mathbb{W} = (w^1, w^2)$ tworzą uporządkowaną bazę ortonormalny tej przestrzeni i niech C będzie macierzą odwzorowania $S|W$ względem pary baz $(\mathbb{W}, \mathbb{W})$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Macierz C jest ortogonalna, co oznacza, że wektory wierszowe tworzą bazę ortonormalną. W szczególności, $c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$, co oznacza, że istnieje jedyna taka liczba $\varphi \in [0, 2\pi)$, że $(c_{21}, c_{22}) = (\sin\varphi, \cos\varphi)$. Ponieważ do danego wektora niezerowego w $\mathbb{R}^2$ można dobrać tylko dwa wektory jednostkowe i prostopadłe (różnią się one jedynie znakiem), więc mamy dwie możliwości: $(c_{11}, c_{12}) = (\cos\varphi, -\sin\varphi)$, względnie $(c_{11}, c_{12}) = (-\cos\varphi, \sin\varphi)$. ta druga możliwość jest wykluczona, bo wtedy $\det C = -1$. W takim jednak przypadku, równanie charakterystyczne $\det(\lambda I - C)$ ma rozwiązanie rzeczywiste (sprawdź to), co implikowałoby istnienie wektorów własnych odwzorowania $S|W$, a co za tym idzie, także S. Wtedy jednak S miałoby wartości własne, co przeczyłoby naszemu założeniu. W konsekwencji, C jest macierzą obrotu w przestrzeni W, tzn. $S|W = R_\varphi$. Weźmy teraz dowolną parę wektorów $x \in W$

oraz $y \in W^{\perp}$ Ponieważ $S|W$ jest izomorfizmem przestrzeni W, więc istnieje $x' \in W$, że $S(x') = x$. Zauważmy, że

$$\langle x, S(y) \rangle = \langle S(x'), S(y) \rangle = \langle x', y \rangle = 0.$$

Co wobec dowolności wyboru $x \in W$ dowodzi , iż obok W także $W^{\perp}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania S. I tak jak w (1), $V = W \boxplus W^{\perp}$, gdzie tym razem W jest przestrzenią dwuwymiarową , na której S działa jako obrót.

W ten sposób wykonaliśmy pierwszy krok rozkładu przestrzeni V na prostopadłe składniki jedno- i dwuwymiarowe, o których mowa w tezie. Dalej należy przyjąć $V_1 = W$ i cała procedurę powtórzyć w odniesieniu do przestrzeni niższego wymiaru $W^{\perp}$ i odwzorowania $S|W^{\perp}$, które należy do $O(W^{\perp})$. Wobec tego, że wymiar V jest skończony, po skończonej liczbie kroków otrzymamy żądany rozkład. □

Zadanie 1 Korzystając z twierdzenia udowodnić, że każde odwzorowanie ortogonalne można przestawić jako złożenie skończonej liczby odbić M_X w podprzestrzeniach X wymiaru o jeden mniejszego niż wymiar przestrzeni V.

Ruchy sztywne

O ruchach sztywnych już wspominaliśmy, teraz czas na formalną definicję.

Definicja 1 Niech V – przestrzeń euklidesowa skończonego wymiaru. Każde odwzorowanie $S \in O(V)$, że $\det S = 1$ jest *ruchem sztywnym* w V.

Powyższą definicję możemy uzasadnić w następujący sposób: Niech $S \in O(V)$ i niech $V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_m$ będzie rozkładem V na podprzestrzenie niezmiennicze odwzorowania S, opisanym w twierdzeniu. Wówczas

$$\det S = \prod_{i=1}^{m} \det(S|V_i),$$

co można wywnioskować z przedstawienia macierzowego odwzorowania S. Oczywiście, jeśli $S|V_i$ jest obrotem, to $\det(S|V_i) = 1$. W konsekwencji, $\det S = (-1)^s$, gdzie s oznacza liczbę tych jednowymiarowych przestrzeni V_i, że $S|V_i = -I|V_i$. Jeśli $\det S = 1$, to liczba s jest parzysta. Wtedy wspomniane przestrzenie jednowymiarowe można podzielić na pary. Niech V_j, V_k będzie taką parą. Wtedy $S|(V_j \boxplus V_k) = -I|(V_j \boxplus V_k)$, ale odwzorowanie *minus identyczność* ma względem dowolnej pary baz uporzadkowanych $(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ przestrzeni dwuwymiarowej $V_j \boxplus V_k$ macierz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jeśli $\mathbb{F}$ jest bazą ortonormalną, to macierz ta jest macierzą obrotu R_π o kąt π. W takim razie, gdy $\det S = 1$, to V możemy rozłożyć na podprzestrzenie $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_l \boxplus W$, że ograniczenie $S|W_i$, $i = 1, \ldots l$, jest obrotem R_{φ_i}, zaś ograniczenie $S|W$ jest identycznością. Określmy teraz odwzorowania $S_{(t)}$, $t \in [0,1]$, w ten sposób, że $S_{(t)}|W_i = R_{t\varphi_i}$ oraz $S_{(t)}|W$ jest identycznością na W. Oczywiście $S_{(t)}$ są ortogonalne, $S_{(0)} = I$ oraz $S_{(1)} = S$ a zatem każdy zbiór $K \subseteq V$ możemy w sposób "płynny" przeprowadzić na izometryczną kopię $S(K)$. Ruch zbioru K możemy zrealizować jako przekształcenie $[0,1] \ni t \mapsto S_{(t)}(K)$. Z drugiej strony, jeśli S jest takim odwzorowaniem ortogonalnym, że istnieje ciągła rodzina przekształceń $S_{(t)} \in O(V)$, $t \in [a,b]$, że $S_{(a)} = I$ oraz $S_{(b)} = S$, to ponieważ $\det S_{(t)}$ może przyjmować tylko wartości ± 1 oraz $\det S_{(a)} = \det I = 1$ i funkcja $t \mapsto \det S_{(t)}$ jest ciągła, więc musi być stale równa 1. W rezultacie $\det S = \det S_{(b)} = 1$. (Nie dbałem tutaj o zbytnią dokładność, nie sprecyzowałem np. co znaczy pojęcie *ciągła rodzina przekształceń.*)

Uwaga 2 Pwszechnie używane pojęcie ruchu sztywnego jest ogólniejsze niż tutaj: Izometria przestrzeni euklidesowej V jest ruchem sztywnym, jeśli jest złożeniem odwzorowania ortogonalnego o wyznaczniku 1 i przesunięcia (być może o wektor $\mathbf{0}$).

Z ruchami sztywnymi powiązane jest pojęcie orientacji.

Orientacja

Definicja 2 Powiemy, że dwie uporządkowane bazy ortonormalne $\mathbb{E} = (e^1, \ldots, e^n)$, $\mathbb{F} = (f^1, \ldots, f^n)$ wyznaczają tę samą *orientację* przestrzeni euklidesowej V, jeśli odwzorowanie liniowe S, które przeprowadza bazę $\mathbb{E}$ na $\mathbb{F}$, tzn. $S(e^i) = f^i$, $i = 1, \ldots, n$, ma wyznacznik 1.

Zauważmy, że S określone powyżej należy do $O(V)$ (dlaczego?), jest zatem ruchem sztywnym. Łatwo spostrzec, że mamy tylko dwie orientacje. Mianowicie, jeśli ustalić $\mathbb{E}$, to wszystkie pozostałe repery ortonormalne są dwóch typów: te, dla których $\det S = 1$ i te, dla których $\det S = -1$. Wszystkie repery tego samego typu wyznaczają tę samą orientację, a różnego – inną.

Definicja orientacji ma prostą interpretację geometryczną w 3D: Obierzmy punkt w otaczającej przestrzeni i przyjmijmy, że przedstawia on początek układu. Weźmy dwa trójnogi o równych i prostopadłych krawędziach, że ich narożniki spoczywają w początku. Pomalujmy krawędzie każdego trójnogu tymi samymi trzema barwami, np. żółtą, niebieską i czerwoną, po jednej barwie na krawędź. Trójnogi te reprezentują repery, kolory możemy traktować jak numery. Dwa trójnogi wyznaczają tę samą orientację, jeśli jeden możemy przemieści na drugi, tak by kolory się zgadzały.