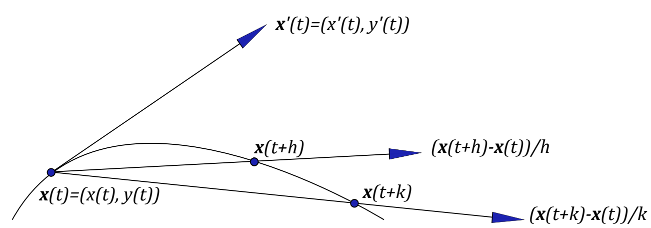
Geometria. Rozwiązania niektórych zadań z listy 2

Inne rozwiązanie zadania 2. (Wyznaczyć równanie stycznej do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w dowolnym jej punkcie $X(x_0, y_0)$.)

Przypuśćmy, że krzywa na płaszczyźnie jest zadana za pomocą parametryzacji: $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$. Możemy też powiedzieć, że jest on zadana za pomocą układu dwóch funkcji rzeczywistych: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Parametryczny opis krzywej możemy odnieść do opisu ruchu. Przedział (a, b) możemy interpretować jako przedział czasu, $\boldsymbol{x}(t)$, to położenie poruszającego się po płaszczyźnie punktu w chwili t. Jeśli czas wzrośnie o h, to punkt przemieści się do położenia $x(t+h)$. Iloraz różnicowy $\frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h}$ jest wektorem współliniowym z $\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)$ zatem jest wektorem równoległym do siecznej przechodzącej przez punkty $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(t+h)$. Przypuśćmy, że istnieje granica tego ilorazu różnicowego:

$$\frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} = \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \xrightarrow[h \to 0]{} (x'(t), y'(t)) = \boldsymbol{x}'(t).$$

Jeśli wektor $\boldsymbol{x}'(t)$, nazywany *prędkością chwilową w chwili* t krzywej $\boldsymbol{x}$, jest niezerowy, to jest on równoległy do stycznej w punkcie $\boldsymbol{x}(t)$ (patrz: ilustracja). (W kursie analizy tak się w istocie styczną definiuje.) Parametryzację krzywej x nazywamy właściwą, jeśli dla każdej liczby t, $\boldsymbol{x}'(t)$ jest niezerowy.



Rysunek 1: Wektor $\boldsymbol{x}'(t)$ jest równoległy do stycznej do krzywej $\boldsymbol{x}$ w $\boldsymbol{x}(t)$.

Jak wiemy, elipsę daną równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ możemy opisać za pomocą parametryzacji $x(\varphi) = a \cos \varphi$, $y(\varphi) = b \sin \varphi$. Parametryzacja ta jest, jak łatwo zauważyć, właściwa. Dobierzmy φ_0 tak, by $x_0 = x(\varphi_0)$, $y_0 = y(\varphi_0)$.

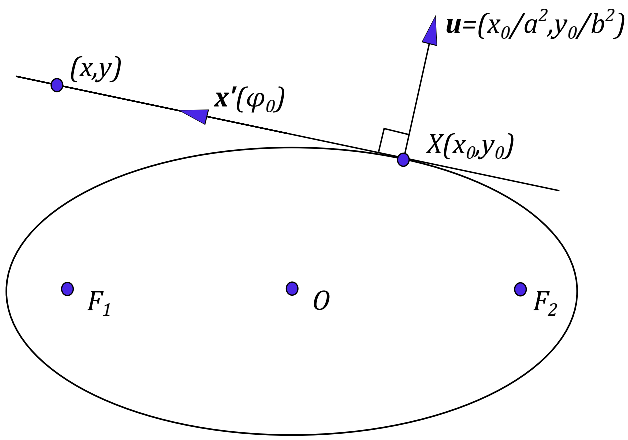
Różniczkując równanie ze względu na φ otrzymamy

$$\frac{2xx'}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Podstawiając $\varphi = \varphi_0$ dostaniemy z kolei

$$\frac{x_0 x'(\varphi_0)}{a^2} + \frac{y_0 y'(\varphi_0)}{b^2} = 0.$$

Stąd wektory $\boldsymbol{u} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ i $\boldsymbol{x}'(\varphi_0) = (x'(\varphi_0), y'(\varphi_0))$ są prostopadłe. Niech (x, y) będzie punktem szukanej stycznej, wtedy wektor $(x - x_0, y - y_0)$ jest równoległy do $\boldsymbol{x}'(\varphi_0)$, więc prostopadły do $\boldsymbol{u}$.



Rysunek 2: Wektor $\boldsymbol{u}$ jest prostopadły do prostej stycznej w X, więc prostopadły do $(x - x_0, y - y_0)$.

Stąd równanie

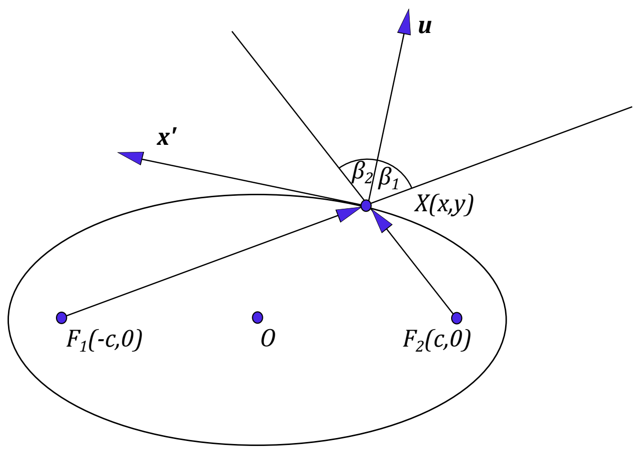
$$\left\langle (x - x_0, y - y_0), \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \right\rangle = 0$$

Po prostym przekształceniu z uwzględnieniem tego, że (x_0, y_0) spełnia równanie elipsy jako jej punkt, dostaniemy szukane równanie prostej stycznej.

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Rozwiązanie zadania 3. ((Bilard eliptyczny) Wyobraźmy sobie punkt poruszający się prostoliniowo wewnątrz elipsy. Kiedy dociera on do brzegu elipsy w punkcie X, to odbija się w X tak, jakby odbijał się od stycznej do elipsy w tym punkcie i dalej, aż do następnego odbicia, porusza się ruchem prostoliniowym. Powstały w ten sposób tor ruchu jest łamaną. Wykazać, że jeśli jedno z ogniw tej łamanej przechodzi przez ognisko elipsy, to kolejne także (oczywiście ogniska moga być różne!).)

Sposób 1. (jak na ćwiczeniach) Niech $X(x,y)$ będzie punktem elipsy, do którego dotarł poruszający się prostoliniowo punkt przeszedłszy uprzednio przez ognisko $F_1(-c,0)$. By wykazać, że teraz przejdzie on przez $F_2(c,0)$, wystarczy udowodnić, że kąty β_1, β_2 utworzone przez każdy z wektorów $\overrightarrow{F_1X} = (x+c,y)$, $\overrightarrow{F_2X} = (x-c,y)$ z wektorem $\boldsymbol{u} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right)$ prostopadłym do stycznej do elipsy w punkcie X (patrz: rozwiązanie zadania 2) są takie same (patrz: rysunek). Oczywiście, zamiast równości kątów wystar-



Rysunek 3: Kąty β_1, β_2

czy wykazać równość ich cosinusów. Przypomnijmy, że jeśli α – kąt między wektorami $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, to

$$\cos\alpha = \left\langle \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} \right\rangle.$$

Stąd pozostaje nam dowieść, że

$$\frac{\langle \overrightarrow{F_1X}, \boldsymbol{u} \rangle}{\|\overrightarrow{F_1X}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{F_2X}, \boldsymbol{u} \rangle}{\|\overrightarrow{F_2X}\|}. \tag{1}$$

Po przejściu do współrzędnych i skorzystania z faktu, że (x, y) leży na elipsie z łatwością obliczamy, że

$$\langle \overrightarrow{F_1X}, \boldsymbol{u} \rangle = 1 + \frac{cx}{a^2}, \qquad \langle \overrightarrow{F_2X}, \boldsymbol{u} \rangle = 1 - \frac{cx}{a^2}.$$

Z równania elipsy wynika, że $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$. Co więcej, $c^2 = a^2 - b^2$, przy założeniu, że $a > b$. W takim razie

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{F_1X}\|^2 &= (x^2 + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2 \end{aligned}$$

W konsekwencji,

$$\|\overrightarrow{F_1X}\| = a\left|\frac{cx^2}{a} + 1\right| = a|\langle \overrightarrow{F_1X}, \boldsymbol{u} \rangle|.$$

W podobny sposób dowodzimy, że

$$\|\overrightarrow{F_2X}\| = a|\langle \overrightarrow{F_2X}, \boldsymbol{u} \rangle|.$$

Wykazane równości dowodzą, że prawa i lewa strony hipotetycznej równości (1) są równe a bądź $-a$, różnią się więc co najwyżej znakiem. Oczywiście obie strony zmieniają wartość w sposób ciągły w zależności od X (więc pozostają stałe!) , a ponieważ są równe np. w punkcie $X = (a, 0)$, więc równe są zawsze.

Sposób 2. Zacznijmy od prostej obserwacji dotyczącej różniczkowania krzywych zadanych za pomocą parametryzacji $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. Niech $f(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|$. Zróżniczkujmy f^2,

$$2ff' = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle' = (x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle.$$

Po podzieleniu przez $2f$ dostaniemy

$$f' = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Niech $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\varphi)$ – określona wcześniej parametryzacja elipsy. Jeśli X oznacza punkt elipsy o współrzędnych (x, y) i wektor $\boldsymbol{x}$ ma te same współrzędne to możemy napisać $\overrightarrow{OX} = \boldsymbol{x}$, gdzie O ma współrzędne $(0, 0)$ (początek układu). Stąd $\overrightarrow{F_1X} = \overrightarrow{F_1O} + \boldsymbol{x}$. Pamiętając o naszej parametryzacji, możemy ostatni związek zróżniczkować:

$$\overrightarrow{F_1X}' = \boldsymbol{x}'.$$

(Bo funkcja stała $\varphi \mapsto \overrightarrow{F_1O} = (c, 0)$ ma pochodną równa zeru.) Z takich samych powodów

$$\overrightarrow{F_2X}' = \boldsymbol{x}'.$$

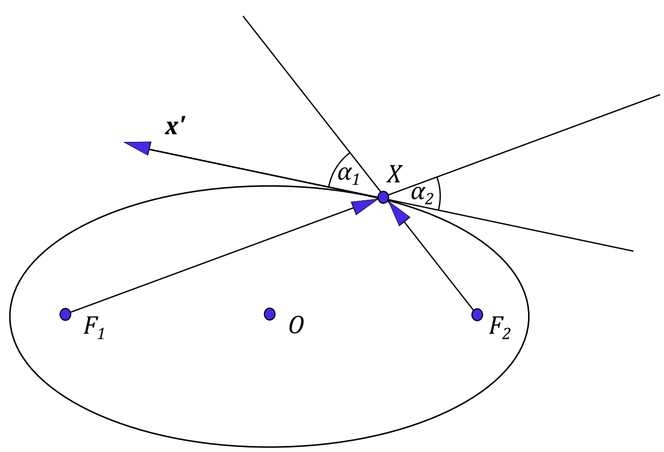
Pamiętając o wzorze na pochodną f, zróżniczkujmy równanie elipsy $\|\overrightarrow{F_1X}\| + \|\overrightarrow{F_2X}\| = d$. Dostaniemy,

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{F_1X}}{\|\overrightarrow{F_1X}\|}, \boldsymbol{x}' \right\rangle + \left\langle \frac{\overrightarrow{F_2X}}{\|\overrightarrow{F_2X}\|}, \boldsymbol{x}' \right\rangle = 0.$$

Stąd

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{F_2X}}{\|\overrightarrow{F_2X}\|}, \frac{\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}'\|} \right\rangle = -\left\langle \frac{\overrightarrow{F_1X}}{\|\overrightarrow{F_1X}\|}, \frac{\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}'\|} \right\rangle \tag{2}$$

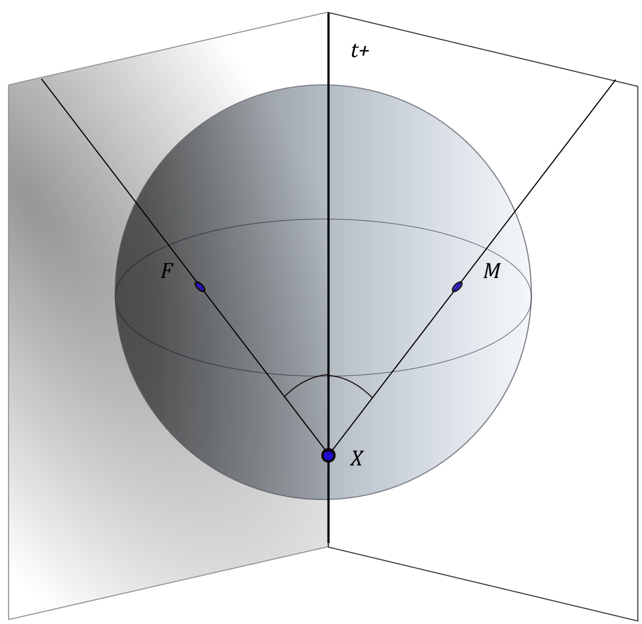
Zauważmy, że wielkość po lewej stronie ostatniej równości, to cosinus kąta między wektorem $\overrightarrow{F_2X}$ i wektorem stycznym x' do elipsy w X. Wspomniany kąt został na rysunku 4 oznaczony jako α_1.



Rysunek 4: Kąty α_1, α_2

Wielkość po prawej stronie równości jest równa minus cosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{F_1X}$ i $\boldsymbol{x}'$, jest więc cosinusem kąta dopełniczego oznaczonego na rysunku jako α_2. Nasza równość głosi więc, że $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$. Stąd $\alpha_1 = \alpha_2$ i dowiedliśmy, że następne ogniwo łamanej przejdzie przez F_2. W obu rozpatrywanych rozumowaniach zakładliśmy, że punkt najpierw przechodzi przez ognisko F_1. Oczywiście nie ma to znaczenia, bo elipsa ma oś symetrii, względem której ogniska są symetryczne.

Sposób 3. Nazwijmy go klasycznym. Nie wiem, czy Apoloniusz z Pergi (około 262 p.n.e – 190 p.n.e), autor traktatu *Stożkowe* ($K\omega\nu\iota\kappa\alpha$) znał ten sposób, ale prawie na pewno tak. Zacznijmy od prostej *obserwacji* (patrz: rysunek 5): Przypuśćmy, że dwie płaszczyzny są styczne do sfery w punktach F i M i przypuśćmy, że przecinaja się one wzdłuż prostej t. Obierzmy na tej prostej jakikolwiek punkt X. Dzieli on prostą t na dwie półproste $t-$ i $t+$. Ponieważ płaszczyzna zawierająca prostą t i środek sfery jest płaszczyzną symetrii całej konfiguracji, więc kąt o bokach XF, $t+$ jest taki sam jak kąt o bokach XM, $t+$. Przypomnijmy teraz, że każdą elipsę można otrzymać jako



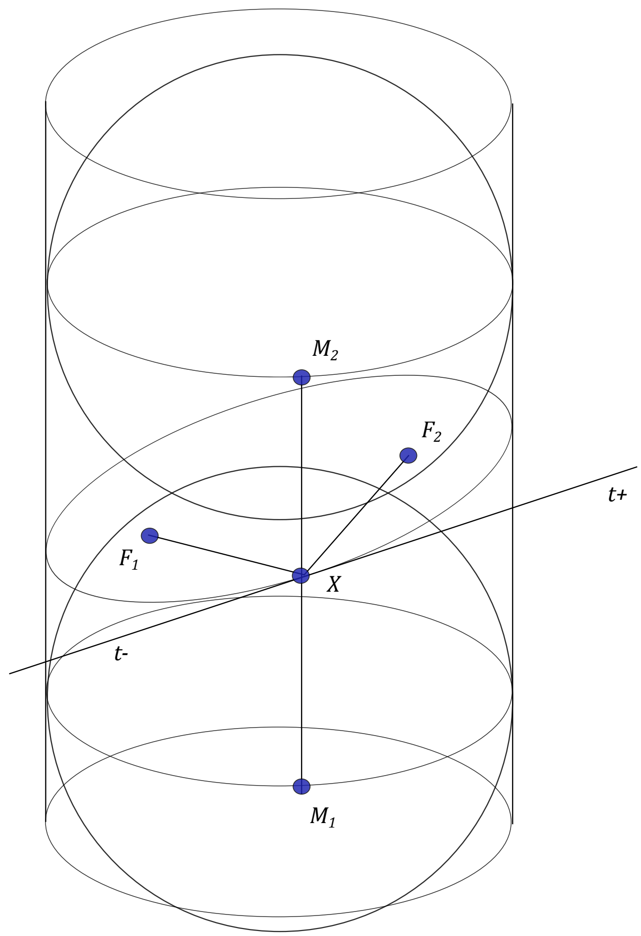
Rysunek 5: Zaznaczone kąty są równe.

przekrój odpowiedniego walca kołowego (rysunek 6). Prosta t zaznaczona na rysunku to styczna do elipsy w punkcie X. Leży ona w płaszczyźnie elipsy. Z drugiej strony leży, on a w płaszczyźnie stycznej walca w punkcie X. Płaszczyzna ta zawiera jeszcze tworzącą walca przechodzącą przez M_1 i M_2. Prosta t leży więc na przecięciu dwu płaszczyzn stycznych tak do jednej sfery jak i drugiej. Na podstawie *obserwacji*, kąt $\measuredangle(\overrightarrow{XF_1}, t-)$ o bokach XF_1 , $t-$ jest taki sam, jak $\measuredangle(\overrightarrow{XM_1}, t-)$. Z takich samych powodów $\measuredangle(\overrightarrow{XF_2}, t+) = \measuredangle(\overrightarrow{XM_2}, t+)$. Jednak kąty $\measuredangle(\overrightarrow{XM_1}, t-)$ i $\measuredangle(\overrightarrow{XM_2}, t+)$ są sobie równe jako kąty wierzchołkowe. W rezultacie $\measuredangle(\overrightarrow{XF_1}, t-) = \measuredangle(\overrightarrow{XF_2}, t+)$. Co oczywiście kończy nasze rozumowanie! Użyłem dla uproszczenia rysunku walca. Jeśli elipsę uważać za przekrój stożka, to rozumowanie można powtórzyć bez istotnych zmian. Czy to już wszystkie sposoby? Jeszcze nie.

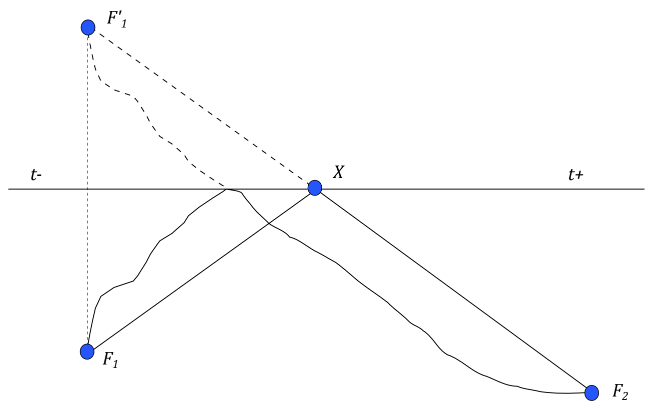
Sposób 4. Zacznijmy od następującego zadania. Znaleźć najkrótszą drogę łączącą punkty F_1 i F_2 i docierającą do prostej t (patrz: rysunek 7).

Rozumowanie jest bardzo proste. Traktujemy t jako oś symetrii. Odbijamy w niej F_1. Otrzymamy wtedy punkt F_1'. Łączymy go z F_2 odcinkiem. Przetnie on t w pewnym punkcie X. Łamana F_1XF_2 jest szukaną najkrótsza drogą. Rzeczywiście, jej długość jest równa długości odcinka $F_1'F_2$, a jeśli wziąć jakąkolwiek inną drogę (krzywa na rysunku), to poprzez odbicie pewnej jej części (krzywa przerywana) otrzymamy równą jej co do długości drogę łączącą F_1' z F_2 niebędącą odcinkiem, więc o długości większej niż $|F_1'F_2|$. Przy okazji zauważmy, że X jest takim punktem (jedynym zresztą) na t, że zachodzi równość kątów: $\measuredangle(XF_1, t-) = \measuredangle(XF_2, t+)$.

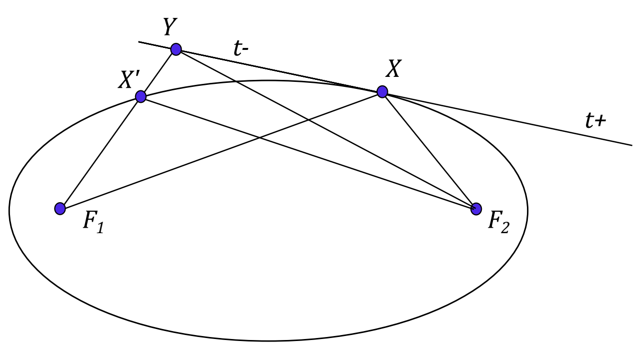
Wróćmy teraz do elipsy. Obierzmy na prostej t stycznej do elipsy w punkcie X jakiś inny punkt Y. Wtedy odcinek F_1Y przetnie elipsę w pewnym punkcie X'. Łatwo zauważyć, że długość łamanej F_1YF_2 jest większa niż długość $F_1X'F_2$ (patrz: rysunek 8), która z kolei, na mocy definicji elipsy, jest równa długości łamanej F_1XF_2. W takim razie, ta ostatnia łamana jest rozwiązaniem zadania o najkrótszej drodze, więc i w tym przypadku $\measuredangle(XF_1, t-) = \measuredangle(XF_2, t+)$.



Rysunek 6: Elipsa jako przekrój walca kołowego



Rysunek 7: Najkrótsza droga z F_1 do F_2.



Rysunek 8: F_1XF_2 – najkrótsza droga z ogniska do ogniska przez styczną t.