## Literatura


1. Ryszard Engelking, Karol Sieklucki, *Wstęp do topologii,* PWN, Warszawa 1986.
2. Czes Kosniowski, *Wprowadzenie do topologii algebraicznej,* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1999.


## Zasadnicze twierdzenie algebry jako ilustracja metody topologicznej.

#### Twierdzenie (d'Alembert, Gauss)

*Jeśli $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ jest wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych, to ma pierwiastek zespolony.*

Chodzi nam o ilustrację metody, więc dowód będzie nieformalny. Wyobraźmy sobie punkt $X$ poruszający sie po okręgu w czasie $[0, T]$. W chwili $t$ znajduje się on w położeniu $X_t$. Jego położenie startowe to $P$. Do $P$ zaczepiona jest nić, która rozwija się względnie zwija wzdłuż okręgu do punktu $X_t$. Jeśli do chwili $t$ nawinęła się ona przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a potem $X$ porusza się zgodnie z ruchem wskazówek, to nić zamiast rozwijana jest zwijana. Załóżmy, że $X_T = P$; tzn. ruch zaczął się i zakończył w tym samy punkcie. Wtedy możliwe są następujące sytuacje:

1. Nić jest kilkakrotnie nawinięta na okrąg przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
2. Nić zwinęła się, więc jest $0$-krotnie nawinięta.
3. Nić jest kilkakrotnie nawinięta na okrąg zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Stąd z ruchem $t \mapsto X_t$ punktu $X$ po okręgu możemy związać liczbę $\deg(t \mapsto X_t)$, nazywaną *stopniem,* wyrażającą liczbę nawinięć nici na okrąg. W przypadku, gdy nawinięcia są przeciwne do ruchu wskazówek zegara, bierzemy je z plusem, gdy zgodne $-$ z minusem, a gdy nić jest zwinięta, kładziemy 0.

Niech $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ (geometrycznie: okrąg jednostkowy ze środkiem $0$). Ruchy punktów na $S^1$ możemy utożsamiać z funkcjami ciągłymi $z : [0, T] \to \mathbb{S}^1$. Funkcje ciągłe argumentu rzeczywistego nazywamy w topologii *drogami*. Droga $z$ jest *zamknięta* jeśli $z(0) = z(T)$. W takim razie, jeśli $z$ jest drogą zamkniętą w $S^1$, to ma stopień.

#### Przykład 1.

Niech $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Droga $z_k \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ dana wzorem: $z_k(t) = z(t)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}$ jest zamknięta i ma stopień $\deg(z_k) = k$.

#### Obserwacja 1.

Dano dwie drogi zamknięte $u, v \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$. Przypuśćmy, że $u(0) = v(0)$ oraz $u(t) \neq -v(t)$, dla $t \in [0, \pi]$. Wtedy $\deg(u) = \deg(v)$.

Warunek $u(t) \neq -v(t)$ oznacza, że odległość między $u(t)$ i $v(t)$ jest zawsze mniejsza od średnicy okręgu. Uzasadnienie naszej obserwacji może wyglądać tak:

> Niech $\lambda_u(t)$ oznacza długość nici nawiniętej na $\mathbb{S}^1$ w chwili $t$ w ruchu zadanym przez $u$. (Podobnie jak w przypadku definicji $\deg$, długość bierzemy ze znakiem, w zależności od kierunku nawinięcia.) Oczywiście $\lambda_u$ jest funkcją ciągłą argumentu $t$. Podobnie $\lambda_v$. Gdyby stopnie obu dróg były różne i wynosiły $k$ i $l$, to funkcja $d = \lambda_u - \lambda_v$ miałaby w $t = 0$ wartość $0$, a w $t = 2\pi$ wartość $2(k-l)\pi$. Wtedy jednak z własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych wynika istnienie $t$, dla którego wartość $d(t)$ jest równa $\pi$ bądź też $-\pi$. Stąd natychmiast $u(t) = -v(t)$.

Wykażemy, że podobny fakt ma miejsce nawet wtedy, gdy drogi nie mają wspólnego początku (i końca).

**Wniosek 2.**

*Dano dwie drogi zamknięte* $w, v\colon [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1$. *Przypuśćmy, że* $|w(t) - v(t)| < 1$*, dla* $t \in [0,2\pi]$. *Wtedy* $\deg(w) = \deg(v)$.

***Dowód.*** Niech $p = w(0)$ $q = v(0)$. Określmy drogę $u$ wzorem $u = \frac{q}{p} w$. Ponieważ mnożenie przez liczbę o module $1$ jest geometrycznie obrotem o ustalony kąt, więc $\deg(w) = \deg(u)$. Ponadto, $u$ i $v$ mają ten sam początek oraz

$$|u(t) - v(t)| = \left|\frac{q}{p} w(t) - v(t)\right| \le \left|\frac{q}{p} w(t) - w(t)\right| + |w(t) - v(t)| < \left|\frac{q}{p} - 1\right| + 1 < 2.$$

Stąd $u$ i $v$ mają ten sam stopień, więc także $w$. $\square$

Niech $X = \mathbb{C}[0,2\pi]$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[0,2\pi]$ o wartościach zespolonych. Jak przypominamy, zbiór ten z metryką $|f-g|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)|\colon t \in [0,2\pi]\}$, nazywaną *metryką supremum,* jest przestrzenią metryczną zupełną. Zbiór $D$ dróg zamkniętych w $\mathbb{S}^1$ jest podzbiorem przestrzeni $X$, jest więc także podprzestrzenią. Wniosek 2 możemy przeczytać następująco:

**Wniosek 3**

*Funkcja* $\deg\colon D \to \mathbb{Z}$ *jest ciągła.*

***Dowód.*** Ponieważ funkcja $\deg$ przyjmuje wartości całkowite, a każdy zbiór w $\mathbb{Z}$ jest otwarty (topologia dyskretna), więc wystarczy zauważyć, że dla każdej liczby całkowitej $k$, $\deg^{-1}(k)$ jest zbiorem otwartym. Jeśli jednak $u \in \deg^{-1}(k)$, to na podstawie wniosku 2 mamy, że także kula otwarta $B^\circ(u,1) = \{v \in D\colon |u-v|_\infty < 1\}$ zawarta jest $\deg^{-1}(k)$.

**Ćwiczenie 1.**

Sprawdzić, że zbiór $D$ dróg zamkniętych w $\mathbb{S}^1$ jest domkniętym podzbiorem w $X$, jest więc także przestrzenią zupełną.

***Dowód zasadniczego twierdzenia algebry.*** Przypuśćmy, że $w$ nie ma pierwiastka, tzn. $w(z) \neq 0$, dla wszelkich $z \in \mathbb{C}$. Ponieważ stopień $w$ wynosi $n > 0$, więc $a_n \neq 0$. Wtedy wielomian $w/a_n$ także nie ma pierwiastka, ma ten sam stopień $n$ i współczynnik przy $z^n$ równy 1. Dlatego dalej możemy zakładać, że dla samego wielomianu $w$ mamy $a_n = 1$. Niech $t \mapsto z(t)$ będzie funkcją określoną w przykładzie 1. Dla $R \ge 0$ określmy funkcję $w_R\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ wzorem $w_R(t) = w(Rz(t))$ . Mamy

$$\left|\frac{w_R(t)}{R^n} - z_n(t)\right| = \left|\frac{a_{n-1}}{R} z(t)^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{R^{n-1}} z(t) + \frac{a_0}{R^n}\right|.$$

Ponieważ $|z(t)| = 1$, więc z własności modułu:

$$\left|\frac{w_R(t)}{R^n} - z_n(t)\right| \le \frac{|a_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|a_1|}{R^{n-1}} + \frac{|a_0|}{R^n},$$

dla wszelkich $t$. Stąd $|\frac{w_R}{R^n} - z_n|_\infty < \frac{1}{3}$, o ile liczba $R$ jest dostatecznie wielka. Określmy drogę $u_R\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ wzorem

$$u_R(t) = \frac{w_R(t)}{|w_R(t)|}.$$

Mamy

$$|u_R - z_n| = \left|\frac{R^n}{|w_R|}\frac{w_R}{R^n} - z_n\right| \leq \left|\left(\frac{R^n}{|w_R|} - 1\right)\frac{w_R}{R^n}\right| + \left|\frac{w_R}{R^n} - z_n\right|,$$

gdzie dla przejrzystości opuściliśmy we wszystkich wyrażeniach argument $t$.

Korzystając z multyplikatywności modułu pierwszy składnik po lewej stronie możemy przepisać tak:

$$\left|\left(\frac{R^n}{|w_R|} - 1\right)\frac{w_R}{R^n}\right| = \left|\frac{R^n}{|w_R|} - 1\right|\frac{|w_R|}{R^n} = \left|1 - \frac{|w_R|}{R^n}\right|$$

Ponieważ $|z_n| = 1$, więc z nierówności trójkąta ostatni wyraz nie przekracza $\left|z_n - \frac{w_R}{R^n}\right|$. Przez połączenie wyprowadzonych nierówności otrzymamy, że dla dostatecznie wielkiej liczby $R = \rho$

$$|u_\rho(t) - z_n(t)| \leq 2\left|\frac{w_\rho(t)}{\rho^n} - z_n(t)\right| \leq \frac{2}{3},$$

gdzie przywróciliśmy argument $t$. Na podstawie wniosku 2, otrzymamy $\deg(u_\rho) = n$. Zauważmy teraz, że odzorowanie $[0, \rho] \ni R \mapsto u_R \in D$ jest ciągłe. W takim razie złożenie $R \mapsto \deg(u_R)$ jest w zgodzie z wnioskiem 3 także ciągłym odwzorowaniem określonym na przedziale $[0, \rho]$, przyjmującym wartości całkowite. Ponieważ jedną z tych wartości jest $n$, więc jest to zarazem jedyna wartość naszego odwzorowania. Jednak dla $R = 0$ droga $u_R$ jest stała i równa $w(0)/|w(0)|$. Stąd $\deg(u_0) = 0$ i otrzymaliśmy sprzeczność. $\square$

**Ćwiczenie 2.**

Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ciągła oraz $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^n} = 0$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 1$, to funkcja $h$ określona wzorem $h(z) = z^n + f(z)$ przekształca $\mathbb{C}$ *na* $\mathbb{C}$. (Wskazówka: Przeanalizuj dowód zasadniczego twierdzenia algebry.)

Utożsammy płaszczyznę ze zbiorem liczb zespolonych. Niech $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ oznacza koło jednostkowe o środku $0$. Wykażemy następujące.

**Twierdzenie (o punkcie stałym)**

*Jeśli $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje $x_0 \in \mathbb{B}^2$, że $f(x_0) = x_0$.*

**Komentarz.** Punkt $x_0$ nazywamy *punktem stałym* odwzorowania $f$.

***Dowód.*** Przypuśćmy, że $f$ nie ma punktu stałego. Wtedy dla każdego $z \in \mathbb{B}^2$ mamy $f(z) \neq z$. Para $f(z), z$ wyznacza półprostą $\ell_z$ wychodzącą z $f(z)$ i przechodzącą przez $z$. Półprosta ta musi w pewnym punkcie $F(z)$ przeciąć $\mathbb{S}^1$. Otrzymamy funkcję $F\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$. Funkcję tę można wyrazić wzorem.

**Ćwiczenie 3.**

Wyrazić funkcję $F$ wzorem.

Funkcja $F$ jest ciągła. (Ze wzoru łatwo to wynika !). Rozpatrzmy ciąg funkcji $u_r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ określonych wzorem:

$$u_r(t) = F(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}).$$

Każda z tych funkcji jest drogą w $\mathbb{S}^1$ i co więcej odwzorowanie $[0,1] \ni r \mapsto u_r \in D$ jest ciągłe. W takim razie złożenie $[0,1] \ni r \mapsto \deg(u_r)$ jest funkcją ciągłą o wartościach całkowitych, więc stałą. Zauważmy jednak, że $u_0$ jest funkcją stałą równą $F(0)$, więc $\deg(u_0) = 0$. Nadto z definicji funkcji $F$ wynika, że jeśli $z \in \mathbb{S}^1$, to $F(z) = z$. W takim razie $u_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} = z_1(t)$ i jak wiemy, $\deg(u_1) = \deg(z_1) = 1$. Przeczy to stałości funkcji $r \mapsto \deg(u_r)$. $\square$

**Ćwiczenie 4.**

1. Niech $0 < r < R$. Zbiór $P(r,R) = \{z \in \mathbb{C}\colon r \le |z| \le R\}$ nazywamy *pierścieniem domkniętym* o środku $0$, promieniu wewnetrznym $r$ i zewnętrznym $R$. Wykazać, że jeśli $k$ i $l$ $-$ różne liczby całkowite, to nie istnieje funkcja ciągła $f\colon P(r,R) \to \mathbb{C}$ o tej własności, że na $\mathbb{S}_r = \{z\colon |z| = r\}$ ma ona postać $f(z) = z^k$ zaś na $\mathbb{S}_R$ $-$ postać $f(z) = z^l$.
2. Odwzorowanie ciągłe $X\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ można przedstawić jako *pole wektorowe*. W tym celu z każdą liczbą $z \in \mathbb{C}$ należy związać wektor o początku $z$ i końcu $z + X(z)$. Przypuśćmy, że pole wektorowe $X$ we wszystkich punktach okręgów ograniczających pierścień $P(r,R)$ jest różne od zera. Przypuśćmy ponadto, że na okręgu wewnętrznym pole jest do niego styczne i wskazuje na kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zaś na zwenętrznym jest także styczne, ale wskazuje na kierunek zgodny. Uzasadnić, że musi istnieć punkt $z_0$ wewnątrz pierścienia oraz rzeczywista liczba $\alpha$, że $X(z_0) = \alpha z_0$.

**Ćwiczenie 5.**

Powiemy, że przestrzeń metryczna (topologiczna) ma własność punktu stałego, jeśli każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to X$ ma punkt stały. Podprzestrzeń $Y \subseteq X$ nazwiemy *retraktem* przestrzeni $X$, jeśli istnieje odwzorowanie ciągłe $R\colon X \to X$, że $R[X] \subseteq Y$ oraz dla każdego $y \in Y$ mamy $R(y) = y$.

1. Wykazać, że jeśli przestrzeń $X$ ma własność punktu stałego, to każdy jej retrakt także.
2. Wykazać, że $\mathbb{S}^1$ nie jest retraktem $\mathbb{B}^2$.