Zadania z logiki i teorii mnogości. Lista 5

Zadanie 1. **Kwantyfikatory.** Wszystkie funkcje zdaniowe określone są na uniwersum X oznaczamy je $\varphi(x)$, $\psi(x)$ itp. Wyrażenie $\bigwedge\limits_x \varphi(x)$ oznacza, że $\{x \in X\colon \varphi(x)\} = X$. Wyrażenie $\bigvee\limits_x \varphi(x)$ oznacza, że $\{x \in X\colon \varphi(x)\} \neq \emptyset$. Uzasadnić prawdziwość następujących wyrażeń rachunku funkcyjnego:

1. $\sim\bigvee_x \varphi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim\varphi(x)$;
2. $\sim\bigwedge_x \varphi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim\varphi(x)$;
3. $(\bigwedge_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x)) \Rightarrow \bigwedge_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$;
4. $\bigwedge_x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\bigwedge_x \varphi(x) \wedge \bigwedge_x \psi(x))$;
5. $\bigvee_x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow (\bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_x \psi(x))$.

Kwantyfikatory ograniczone. Niech $A \subseteq X$. Wyrażenie $\bigwedge\limits_{x\in A} \varphi(x)$ oznacza, że $\{x \in A\colon \varphi(x)\} = A$ lub $A \subseteq \{x \in X\colon \varphi(x)\}$. Wyrażenie $\bigvee\limits_{x\in A} \varphi(x)$ oznacza, że $\{x \in X\colon \varphi(x)\} \cap A \neq \emptyset$. Sprawdź, czy powyższe prawa zachodzą dla kwantyfikatorów ograniczonych.

Zadanie 2. Poniższe wyrażenia zapisz w taki sposób, by symbol zaprzeczenia się nie pojawił.

1. $\sim\bigwedge_{a\in\mathbb{R}^n} \bigvee_{b\in\mathbb{R}^n} \bigvee_{i\in[n]}(b_i < a_i \wedge b_i > a_1)$;
2. $\sim\bigwedge_{(a_n\in\mathbb{R}\colon n\in\mathbb{N})}(\bigvee_{c\in\mathbb{R}} \bigvee_{C\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} c < a_n < C) \Rightarrow (\bigvee_{g\in\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} a_n = g)$.

Zadanie 3. Niech $r = \{(1,2),(3,4),(5,6),(6,5),(4,2)\}$ oraz $s = \{(2,3),(3,4),(5,7),(8,8),(3,1)\}$. Oblicz ich złożenia $r \circ r$, r^3, $r \circ s$ oraz $s \circ r$.

Zadanie 4. Uzasadnij następujące twierdzenia dotyczące relacji określonych na pewnym zbiorze X:

1. relacja r jest zwrotna jeśli $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\} \subseteq r$;
2. relacja r jest przechodnia jeśli $r \circ r \subseteq r$;
3. w tym samym duchu zapisz przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność i przeciwsymetryczność relacji r.

Zadanie 5. Niech r będzie relacją o polu X. Automorfizmem relacji r nazywamy każdą permutację φ zbioru X, że $(x\,r\,y) \Leftrightarrow (\varphi(x)\,r\,\varphi(y))$. Niech $\mathrm{Aut}(r)$ oznacza zbiór wszystkich automorfizmów relacji r.

1. Udowodnić, że jest to grupa ze składaniem odwzorowań jako działaniem.
2. Niech X – zbiór skończony. Opisać wszystkie takie relacje r o polu X, że $\mathrm{Aut}(r) = S_X$ (Przypomnijmy – S_X to grupa wszystkich permutacji zbioru X.)
3. Wyznaczyć grupę automorfizmów relacji $r = \{(1,2),(2,1),(3,4),(3,4)\}$.