Zadania z logiki i teorii mnogości. Lista 6

Zadanie 1. Obliczyć złożenie $S \circ R$ następujących relacji:

1. $R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(4,5)\}$, $S = \{(3,5),(5,3),(3,3),(2,1),(1,2),(3,7)\}$;

2. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| = 1\}$.

Zadanie 2. Dwie relacje R i S określone w $\mathbb{R}$ dane są równaniami:

$$R = \{(x,y) \colon F(x,y) = 0\}, \quad S = \{(x,y) \colon G(x,y) = 0\}.$$

Np. odpowiednie relacje R i S z poprzedniego zadania opisują się takimi równaniami jeśli przyjąć: $F(x,y) = x^2+y^2-1$ oraz $G(x,y) = |x|+|y|-1$. Czy możesz podać jakieś równanie za pomocą którego można wyrazić złożenie $S \circ R$. (**Wskazówka.** Wolno użyć funkcji emin określonej na podzbiorach $A \subseteq \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$\operatorname{emin} A = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \text{ jest najmniejsza liczbą w } A, \\ \\ 1, & \text{jeśli w } A \text{ nie ma najmniejszej liczby.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Relacja R określona w $\mathbb{R}$, to znaczy $R \subseteq \mathbb{R}^2$ jest opisana nierównością: $R = \{(x,y) \colon F(x,y) \leqslant 0\}$. Cały zbiór R przesuwamy o pewien wektor $\boldsymbol{u} = (a,b)$, to znaczy, tworzymy zbiór

$$S = R + \boldsymbol{u} := \{(x+a, y+b) \colon (x,y) \in R\}.$$

Jaką nierównością można opisać S.

Zadanie 4. Wykazać, że złożenie dwu relacji równoważności określonych na tym samym zbiorze X jest relacją równoważności.

Zadanie 5. Określmy relację $\sim$ w zbiorze par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a + d = c + d.$$

1. Wykazać, że jest to relacja równoważności.

2. Określmy dodawanie par: Jeśli $\boldsymbol{x} = (a,b)$, $\boldsymbol{y} = (c,d)$, to $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a+c, b+d)$. Wykazać, że dodawanie jest zgodne z relacją $\sim$, tzn. jeśli $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}'$ oraz $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{y}'$, to $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$.

3. Określmy mnożenie par: Jeśli $\boldsymbol{x} = (a, b)$, $\boldsymbol{y} = (c, d)$, to $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (ac + bd, ad + bc)$. Wykazać, że i mnożenie jest zgodne z relacją $\sim$.

Ta zgodność pozwala określić operacje dodawania i mnożenia na zbiorze klas abstrakcji $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ relacji $\sim$ za pomocą reprezentantów wzorami:

$$[\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}], \qquad [\boldsymbol{x}] \cdot [\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}].$$

Wykazać, że tak określone operacje na $\mathbb{Z}$ są łaczne, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Oba działania mają element neutralny: dodawanie – $[(0, 0)]$, mnożenie zaś – $[(1, 0)]$. Każdy element rodziny $\mathbb{Z}$ ma element przeciwny. Oznaczenie zbioru ilorazowego przez $\mathbb{Z}$ nie jest przypadkowe. W ten sposób właśnie wprowadza się liczby całkowite. Zauważmy, że dla każdej klasy $K \in \mathbb{Z}$ istnieje dokładnie jedna liczba naturalna n, że zachodzi jedna z trzech możliwości: (1) $n > 0$ i $K = [(n, 0)]$; (2) $n = 0$ i $K = [(0, 0)]$; (3) $n > 0$ i $K = [(0, n)]$. W pierwszym i drugim przypadku klasę K oznaczamy symbolem n i nazywamy liczbą naturalną; w trzecim wprowadzamy symbol $-n$ na oznaczenie klasy K, którą nazywamy liczbą całkowitą ujemną. Mimo całej abstrakcji, są to dobrze Wam znane liczby całkowite. W podobny sposób można wprowadzić liczby wymierne; tym razem jako pary liczb całkowitych. Detale w notatkach do wykładu.

Zadanie 6. Dany jest ciąg zdań ponumerowanych liczbami naturalnymi: $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$.

1. Niech $(k_n = 2^n \colon n \in \mathbb{N})$. Wiemy, że T_1 jest zdaniem prawdziwy oraz każdorazowo gdy T_{k_s} jest prawdziwe, także T_{2k_s} jest prawdziwe. Czy prawdą jest, że wszystkie zdania należące do ciągu zdań $(T_{2^n} : n \in \mathbb{N})$ są prawdziwe?

2. Niech $(k_n = 2n \colon n \in \mathbb{N})$. Wiemy, że T_0 jest zdaniem prawdziwym oraz każdorazowo gdy $T_{k_s)}$ jest zdaniem prawdziwym, także T_{k_s+1} oraz T_{k_s+2} są zdaniami prawdziwymi. Czy prawdą jest, że wszystkie zdania $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ są prawdziwe?

3. Niech powtórnie $(k_n = 2n \colon n \in \mathbb{N})$. Wiemy, że T_5 jest zdaniem prawdziwym oraz każdorazowo gdy T_{k_s} jest zdaniem prawdziwym, także T_{k_s+1} oraz T_{k_s+2} są zdaniami prawdziwymi. Czy prawdą jest, że wszystkie zdania $T_5, T_6, \ldots, T_n, \ldots$ są prawdziwe?

4. Dano dwie liczby naturalne dodatnie $u > 1$ i $v > 1$. Wiemy, że pewne zdanie T_p w naszym ciągu jest prawdziwe. Ponadto wiemy, że każdorazowo gdy prawdziwe jest zdanie T_s z naszego ciągu, to także zdania

T_{s+u} oraz T_{s+v} są prawdziwe. Jakie warunki muszą spełniać u i v, by istniał numeru q, począwszy od którego wszystkie zdania T_n były prawdziwe?

Zadanie 7. Zajrzeć do wikipedii pod hasło Nim. Przeanalizować dowód istnienia strategi zwycięskiej w tej grze.