Zadania z logiki i teorii mnogości. Lista 7

Zadanie 1. Dano dwa niepuste zbiory X i Y. Wykazać że jeśli istnieje suriekcja $f\colon X \to Y$, to $|X| \geqslant |Y|$.

Zadanie 2. Niech S_{0-1} oznacza zbiór wszystkich ciągów $(\varepsilon_n\colon n \in \mathbb{N})$ o wartościach $0, 1$.
(a) Wykazać, że odwzorowanie D dane wzorem

$$D(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}}.$$

jest suriekcją zbioru S_{0-1} na zbiór $[0, 1]$.
(b) Wykazać, że odwzorowanie C dane wzorem

$$D(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon_i}{3^{i+1}}.$$

jest injekcją zbioru S_{0-1} w zbiór $[0, 1]$.
Wywnioskować, z obu części zadania, że zbiór S_{0-1} jest równoliczny z $[0, 1]$, a w konsekwencji z $\mathbb{R}$.

Zadanie 3. Znaleźć bijekcję zbioru $S_{0-1} \times S_{0-1}$ na zbiór S_{0-1}. Wywnioskować na podstawie istnienia takiej bijekcji, że $[0, 1 \times [0, 1]$ jest równoliczny z $[0, 1]$. W konsekwencji $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest równoliczny $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $\mathscr{T}$ oznacza rodzinę trójkątów na płaszczyźnie o rozłącznych wnętrzach. Wykazać, że jest ona przeliczalna. (Wskazówka. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym.)

Zadanie 5. Uzasadnić, że każdy podzbiór zbioru przeliczalnego jest co najwyżej przeliczalny, to znaczy, skończony bądź przeliczalny.

Zadanie 6. Niech $(S_i : i \in \mathbb{N})$ będzie rodziną zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Wykazać, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Zadanie 7. Wykazać, że zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych $\mathbb{P}(\mathbb{Q})$ jest przeliczalny.

Zadanie 8. Liczbę rzeczywistą nazywamy algebraiczną, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych. Wykazać, że zbiór $\mathbb{A}$ wszystkich takich liczb jest przeliczalny.

Zadanie 9. Wykazać, jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem przeliczalnym, to $\mathbb{R} \setminus A$ jest nieprzeliczalny. Wywnioskować stąd, że zbiory liczb niewymiernych i liczb przestępnych, to znaczy takich, które nie są algebraiczne, są nieprzeliczalne. (W istocie zbiory te są mocy continuum.)