Zbiory nieprzeliczalne. Twierdzenie Cantora Zbiór A nazywamy *nieprzeliczalnym* jeśli nie jest on przeliczalny.

Przez ciąg o wartościach w X rozumiemy tutaj, podobnie jak na wykładzie, każde odwzorowanie z $\mathbb{N}$ w X. Jeśli a jest ciągiem, to jego wartość w argumencie n zapisujemy tradycyjnie: a_n.

TWIERDZENIE 1 *Zbiór* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *wszystkich ciągów przyjmujących jedynie wartości* 0, 1 *jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Przypuśćmy, że odwrotnie, zbiór ten jest przeliczalny. Ponieważ jest on nieskończony (Przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej n ciągu, który zaczyna się na n jedynek, a potem już ma same zera jest injekcją z $\mathbb{N}$ w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.), więc musiałaby istnieć bijekcja $\varepsilon : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Skonstruujmy ciąg γ w następujący sposób:

$$\gamma_n = 1 - \varepsilon(n)_n.$$

Zauważmy, że w zgodzie z tą definicją γ nie może być wartością funkcji ε. Rzeczywiście, γ różni się od dowolnej wartości $\varepsilon(n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ na n-tym miejscu. W rezultacie ε nie jest *na*, więc nie jest także bijekcją. Otrzymaliśmy sprzeczność. $\square$

UWAGA Konstrukcję ciągu γ możemy przedstawić w następujący sposób: Za pomocą ciągów $\varepsilon(n)$ tworzymy nieskończoną tablicę:

$$\begin{array}{cccccc}
\varepsilon(1)_1 & \varepsilon(1)_2 & \varepsilon(1)_3 & \dots & \varepsilon(1)_n & \dots \\
\varepsilon(2)_1 & \varepsilon(2)_2 & \varepsilon(2)_3 & \dots & \varepsilon(2)_n & \dots \\
\varepsilon(3)_1 & \varepsilon(3)_2 & \varepsilon(3)_3 & \dots & \varepsilon(3)_n & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
\varepsilon(n)_1 & \varepsilon(n)_2 & \varepsilon(n)_3 & \dots & \varepsilon(n)_n & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Ciąg γ tworzymy z wyrazów stojących na przekątnej w ten sposób, że każdy wyraz równy 0 wymieniamy na 1, a równy 1 na 0:

$$\begin{array}{cccccc}
\gamma_1 = 1 - \varepsilon(1)_1 & & & \dots & & \dots \\
& \gamma_2 = 1 - \varepsilon(2)_2 & & \dots & & \dots \\
& & \gamma_3 = 1 - \varepsilon(3)_3 & \dots & & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
& & & \dots & \gamma_n = 1 - \varepsilon(n)_n & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Dlatego przedstawioną metodę dowodu nazywamy *metodą przekątniową*. Metoda ta jest często wykorzystywana w rozmaitych dowodach w różnych działach matematyki.

Mówimy, że zbiór A ma *moc mniejszą* niż zbiór B, co zapisujemy $|A| < |B|$, jeśli $|A| \leqslant |B|$, ale nie jest prawdą, że $|A| = |B|$. W świetle twierdzenia Cantora–Bernsteina możemy też definicję tę wypowiedzieć w następujący sposób: A ma moc mniejszą niż B jeśli $|A| \leqslant |B|$, ale nie jest prawdą, że $|B| \leqslant |A|$.

Zauważmy na marginesie, że w oparciu o dowód twierdzenia 1 możemy stwierdzić, iż $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Jeśli A ma moc mniejszą niż B, to zamiennie możemy powiedzieć, że B ma moc większą niż A.

Pojęcie *mniejsza moc* możemy scharakteryzować w następujący sposób:

STWIERDZENIE 2 *Jeśli A i B są niepustymi zbiorami, to $|A| < |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leqslant |B|$ i nie istnieje surjekcja z A na B.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że istnienie surjekcji z A na B jest równoważne z istnieniem injekcji z B do A. Fakt, że istnienie surjekcji pociąga istnienie odpowiedniej injekcji jest przedmiotem lematu 2 w ustępie na temat twierdzenia Cantora-Bernsteina. Przypuśćmy teraz, że istnieje injekcja $g\colon B \to A$. Ustalmy jakikolwiek element $a_0 \in g(B)$ i określmy odwzorowanie $F\colon A \to B$ jak następuje:

$$F(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & \text{jeśli } x \in g(B); \\ g^{-1}(a_0), & \text{jeśli } x \in A \setminus g(B). \end{cases}$$

F jest oczywiście surjekcją. □

Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcją charakterystyczną zbioru $A \subseteq X$ nazywamy funkcję $\mathbf{1}_A$ o dziedzinie X określoną wzorem

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in A; \\ 0, & \text{jeśli } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Przyjmuje ona wartości w zbiorze $\{0,1\}$, jest więc elementem zbioru $\{0,1\}^X$. Odwrotnie, jeśli funkcja f należy do zbioru $\{0,1\}^X$, to jest ona funkcją charakterystyczną zbioru $A := \{x \in X : f(x) = 1\}$. Wyznacza więc ona ten zbiór. W efekcie przekonujemy się, że funkcja $A \mapsto \mathbf{1}_A$ jest bijekcją ze zbioru 2^X na zbiór $\{0,1\}^X$. Oznacza to, że zbiory $\{0,1\}^X$ i 2^X są równoliczne. W szczególności wynika stąd, że $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$. Oczywiście, jeśli Y jest zbiorem skończonym, to także mamy $|Y| < |2^Y|$. Powstaje pytanie, czy ostatnia relacja jest prawdziwa dla wszelkich zbiorów Y. Twierdzącą odpowiedź daje twierdzenie Cantora.

TWIERDZENIE 3 (CANTOR) *Jeśli X jest dowolnym zbiorem, to $|X| < |2^X|$.*

Dowód. Jeśli $X = \emptyset$, to nierówność jest oczywista, bo $\emptyset$ nie ma elementów zaś $2^\emptyset = \{\emptyset\}$ ma jeden. Jeśli $X \neq \emptyset$, to istnieje injekcja z X w 2^X jest nią, na przykład, funkcja $f\colon X \to 2^X$ dana wzorem $f(x) = \{x\}$. W konsekwencji $|X| \leqslant |2^X|$ i wystarczy dowieść, że żadne odwzorowanie s z X w 2^X nie jest surjekcją, więc tym bardziej bijekcją.

Utwórzmy zbiór $Z \subseteq X$ w następujący sposób: $Z = \{x \in X : x \notin s(x)\}$. Gdyby Z był wartością funkcji s, to istniałby element $u \in X$, że $Z = s(u)$. Wtedy powstaje pytanie, czy $u \in Z$? Jeśli tak, to zgodnie z definicją zbioru Z, mamy $u \notin s(u) = Z$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Jeśli zaś nie, to $u \notin Z = s(u)$, więc na mocy definicji Z mamy $u \in Z$. Znowu otrzymaliśmy sprzeczność. Sprzeczności te dowodzą, że Z nie może być wartością funkcji s; funkcja ta nie jest surjekcją. $\square$