Zadania z logiki i teorii mnogości. Lista 2

Zadanie 1. Wykazać, że następujące formuły rachunku zdań są równoważne:

1. $\sim(\alpha \vee \beta)$ i $(\sim\alpha) \wedge (\sim\beta)$;
2. $\sim(\alpha \wedge \beta)$ i $(\sim\alpha) \vee (\sim\beta)$
3. $\alpha \Rightarrow \beta$ i $(\sim\alpha) \vee \beta$;
4. $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3) \Rightarrow \beta$ i $(\alpha_1 \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha_2 \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha_3 \Rightarrow \beta)$;
5. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ i $(\sim\gamma) \Rightarrow ((\sim\beta) \Rightarrow (\sim\alpha))$, i $\gamma \vee ((\sim\beta) \wedge \alpha)$;
6. $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ i $\sim(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$, i $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$.

Zadanie 2. Określmy funktor zdaniotwórczy G zmiennych α, β:

α	β	G
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Znaleźć taką formułę rachunku zdań o zmiennych zdaniowych α, β, której tablica wartości logicznych pokrywa się z określonym powyżej funktorem, że w formule tej występują jedynie:

(a) alternatywa i negacja;

(b) koniunkcja i negacja;

(c) implikacja i negacja.

Zadanie 3. Określmy funktor zdaniotwórczy F zmiennych x, y, z:

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Znaleźć jakąkolwiek formułę rachunku zdań o zmiennych zdaniowych x, y, z, której tablica wartości logicznych pokrywa się z określonym powyżej funktorem.

Zadanie 4. Niech X oznacza zbiór. Określmy operację różnicy symetrycznej $\triangle$ na rodzinie 2^X wszystkich jego podzbiorów wzorem:

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \sim ((x \in A) \wedge (x \in B))).$$

Jeśli przyjąć oznaczenia $p = (x \in A)$ i $q = (x \in B)$, to prawą stronę równoważności możemy zapisać tak:

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q).$$

Przyjmując dodatkowo $r = (x \in C)$, zapisz z użyciem p, q, r wyrażenia:

1. $x \in (A \triangle B) \triangle C$;
2. $x \in A \triangle (B \triangle C)$.

Oznaczmy pierwsze z otrzymanych wyrażeń przez $L(p, q, r)$ a drugie przez $P(p, q, r)$. Mają one postać form zdaniowych. W dowolny sposób, np. za pomoca Pythona, sprawdź, że $L(p, q, r) \equiv P(p, q, r)$. Na zakończenie wyprowadź wniosek, że $\triangle$ jest działaniem łącznym, tzn.

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$