Zadania z logiki i teorii mnogości. Lista 3

Zadanie 1. Niech a, b, c, d będą różne od zbioru pustego. Jakie związki między nimi pociąga każda z równości:

1. $\{b, c\} = \{b, c, d\}$;
2. $\{a, b, a, c\} = \{a, b, c\}$;
3. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy następujące pary zbiorów są równe:

1. $A = [1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2]$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 \leqslant 0\}$;
2. $A = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ oraz $B = \{(a-1)x^2 + 2bx + c^3\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (chodzi o zbiory funkcji !);
3. $A = \{\{\{\{1\}\}\}\}$, $B = \{\{\{1\}\}\}$.
4. A = zbiór wszystkich trójkątów prostokątnych; B = zbiór wszystkich takich trójkątów o bokach $a \leqslant b \leqslant c$, że $c^2 = a^2 + b^2$.

Zadanie 3. Niech X – zbiór niepusty o n elementach.

1. Wykazać, że 2^X liczy 2^n elementów.
2. Wykazać, że podrodzina $\mathscr{N} = \{A \in 2^X\colon$ A ma nieparzystą liczbę elementów$\}$ liczy 2^{n-1} elementów.
3. Wykazać, że dla każdego niepustego $B \subset X$ podrodzina $\mathscr{N}_B = \{A \in 2^X\colon A \cap B$ ma nieparzystą liczbę elementów$\}$ liczy 2^{n-1} elementów.

Zadanie 4. Sprawdzić, czy dla wszelkich zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;
2. $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (A \cap C)$;
3. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Zadanie 5. Niech $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – rodzina podzbiorów przestrzeni X.

1. Wykazać, że zbiór wszystkich składowych $\mathscr{R}$ tej rodziny (patrz wykład) liczy co najwyżej 2^n elementów oraz że dwie składowe są albo równe, albo rozłączne.

2. Podać przykład rodziny zależnej $\mathscr{A}$, że $n = 3$ oraz $\mathscr{R}$ liczy 8 elementów.

Zadanie 6. Niech X będzie niepustym zbiorem i niech $\mathscr{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X. Wykazać, że

1. $\mathscr{F}$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy (1) $\emptyset \in \mathscr{F}$, (2) jeśli $A \in \mathscr{F}$, to $A' \in \mathscr{F}$, (3) jeśli A i $B \in \mathscr{F}$, to $A \cap B \in \mathscr{F}$.
2. Jeśli $\mathscr{F}$ jest ciałem, to dla wszelkich A, $B \in \mathscr{F}$ mamy $A \setminus B \in \mathscr{F}$ oraz $A \triangle B \in \mathscr{F}$.

Zadanie 7. Wykazać, że dla wszelkich zbiorów A, B, C, D prawdziwe są następujące zdania:

1. $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C \subseteq B \cap D)$;
2. $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup D)$;
3. $(A \subseteq B \Leftrightarrow B \subseteq D) \Rightarrow ((C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus B)$;

Zadanie 8. Wyznacz $\bigcup \mathscr{A}$, $\bigcap \mathscr{A}$, $\bigcup(\bigcup \mathscr{A})$, $\bigcup(\bigcap \mathscr{A})$, $\bigcap(\bigcup \mathscr{A})$, $\bigcap(\bigcap \mathscr{A})$ dla następujących rodzin rodzin zbiorów:

1. $\mathscr{A} = \{\{\{3, 4\}, \{4, 5\}\}, \{\{1, 4\}\}\}$;
2. $\mathscr{A} = \{\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$;
3. $\mathscr{A} = \{\{\{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, -1\}\}, \{\{2, 1\}, \{3, 4\}, \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 1\}\}\}$.

Zadanie 9. Znajdź sumę i przekrój następujących rodzin zbiorów:

1. $\mathscr{A} = \{[0, 1 - \frac{1}{n+2}] \colon n \in \mathbb{N}\}$;
2. $\mathscr{A} = \{[0, n + 1) \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie selektory rodziny zbiorów $\{\{1, 2, 3\}, \{a, A\}, \{@, \#, \Box\}\}$