Równoliczność $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 1 $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1]|$.

Dowód. Ciągowi $\varepsilon = (\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ przyporządkujmy ciąg przedziałów domkniętych $(I_n : n \in \mathbb{N})$ zawartych w $[0,1]$ wg reguł:

- $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow I_1 = [0, \frac{1}{2}]$;
- $\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$.

Załóżmy, że przedział $I_k = [a_k, b_k]$ został już określony, wtedy przyjmujemy:

- $\varepsilon_{k+1} = 0 \Rightarrow I_{k+1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$;
- $\varepsilon_{k+1} = 1 \Rightarrow I_{k+1} = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$.

Oczywiście ciąg $(I_n : n \in \mathbb{N})$ jest zstępujący, to znaczy, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_s \supset \ldots$ Z twierdzenia Helly'ego wynika, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ponadto, długość $I_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że owa część wspólna $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ składa się tylko z jednego elementu, który oznaczmy przez $g(\varepsilon)$. W ten sposób określiliśmy funkcję $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. Odwzorowanie to jest surjekcją. Rzeczywiście, niech $h \in [0,1]$. Utwórzmy teraz ciąg $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ oraz ciąg przedziałów $(J_n : n \in \mathbb{N})$ w następujący sposób:

- $h \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \gamma_1 = 0$ i $J_1 = [0, \frac{1}{2}]$;
- $h \notin [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \gamma_1 = 1$ i $J_1 = [\frac{1}{2}, 1]$.

Jeśli γ_k oraz $J_k = [a_k, b_k] \ni h$ zostały już utworzone, to przyjmujemy

- $h \in [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \Rightarrow \gamma_{k+1} = 0$ i $J_{k+1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$;
- $h \notin [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \Rightarrow \gamma_{k+1} = 1$ i $J_{k+1} = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$.

Utworzony w ten sposób ciąg γ ma oczywiście tę własność, że $g(\gamma) = h$. W takim razie, wobec dowolności h, każdy element przedziału $[0,1]$ jest wartością funkcji g. Jest więc ona surjekcją. W konsekwencji, $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geqslant |[0,1]|$.

Określmy teraz nowe odwzorowanie $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. Najpierw jak poprzednio, każdemu ε przyporządkujmy ciąg przedziałów $(I_n : n \in \mathbb{N})$:

- $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow I_1 = [0, \frac{1}{3}]$;

- $\varepsilon_1 = 1 \Rightarrow I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$.

Załóżmy, że przedział $I_k = [a_k, b_k]$ został już określony, wtedy przyjmujemy:

- $\varepsilon_{k+1} = 0 \Rightarrow I_{k+1} = [a_k, \frac{2a_k+b_k}{3}]$;
- $\varepsilon_{k+1} = 1 \Rightarrow I_{k+1} = [\frac{a_k+2b_k}{3}, b_k]$.

Z konstrukcji wynika, że dla każdej pary ε, $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jeśli dla pewnego i, $\varepsilon_i \neq \gamma_i$ to i-te przedziały ciągów przedziałów skonstruowanych dla ε i γ są rozłączne. Jeśli więc określimy $f(\varepsilon)$ jako jedyny element przekroju $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, to tak określona funkcja f będzie różnowartościowa. Stąd $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant [0,1]$. W rezultacie oba porównywane zbiory są na mocy twierdzenia Cantora–Bernsteina równoliczne. □

Ponieważ $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$, więc jako wniosek otrzymujemy:

Wniosek 2 $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Twierdzenie 3 $|\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Dowód. Pierwszy z porównywanych zbiorów składa się z par $(\varepsilon, \varepsilon')$. Każdej takiej parze przyporządkujmy ciąg $F(\varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon''$ według wzoru:

$$\varepsilon''_n = \begin{cases} \varepsilon_k, & \text{jeśli } n = 2k-1, \\ \varepsilon'_k & \text{jeśli } n = 2k. \end{cases}$$

Kolejne wyrazy ciągu ε'' wyglądają więc tak: $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \ldots$ Łatwo zauważyć, że określona w ten sposób funkcja F jest bijekcją porównywanych zbiorów. □

Ponieważ jeśli $|X| = |X'|$ oraz $|Y| = |Y'|$, to $|X \times Y| = |X' \times Y'|$, więc na podstawie dowiedzionych twierdzeń mamy następujący zaskakujący wniosek:

Twierdzenie 4 (Cantor) $|\mathbb{R}| = |[0,1]| = |[0,1] \times [0,1]| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.

Używając terminów geometrycznych, możemy więc powiedzieć, że prosta, odcinek, płaszczyzna, kwadrat są wszystkie równoliczne.

Na zakończenie zwróćmy jeszcze uwagę, że obraz zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, względem skonstruowanej w dowodzie twierdzenia 1 funkcji f, nosi nazwę *zbioru Cantora*. Zbiór ten możemy sobie wyobrazić w następujący sposób: Z przedziału $[0,1]$ odrzuć przedział otwarty współśrodkowy o długości $\frac{1}{3}$. Otrzymasz zbiór złożony z dwu przedziałów. Z każdego z nich odrzuć trzykrotnie krótszy przedział otwarty współśrodkowy. Otrzymasz teraz cztery przedziały i powtórnie z każdego z nich odrzuć trzykrotnie krótszy przedział otwarty współśrodkowy. Kontynuuj ten proces. Liczby, które nie zostaną odrzucone na żadnym etapie procesu tworzą właśnie zbiór Cantora (dlaczego?). Zauważmy, że łączna długość odrzuconych przedziałów jest równa

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{3^n} + \cdots .$$

Jest to suma szergu geometrycznego. Wynosi ona 1. Zbiór Cantora jest więc nieprzeliczalny i ma długość 0!