# Składanie funkcji

Jeśli funkcje rozumiemy tak jak na wykładzie, to znaczy jako pewne zbiory par uporządkowanych, to możemy określić ich złożenie w następujący sposób:

Definicja 1 *Złożeniem* funkcji $f$ z funkcją $g$ nazywamy zbiór par uporządkowanych $g \circ f$ określony następująco:

$$(x, z) \in g \circ f \iff \bigvee_y ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g).$$

Ze względu na następne twierdzenie przypomnijmy, że zbiór pusty uważamy za funkcję. Zauważmy, że może się zdarzyć, że $g \circ f$ jest zbiorem pustym nawet jeśli tak $f$ jak i $g$ nie były (znajdź odpowiedni przykład!).

Twierdzenie 1 *Jeśli $f$ i $g$ są funkcjami, to ich złożenie $g \circ f$ jest także funkcją.*

*Dowód.* Należy wykazać, że jeśli $(x, z)$ i $(x, z')$ są elementami $g \circ f$, to $z = z'$. Zgodnie z definicją złożenia, istnieją elementy $y, y'$, że $(x, y) \in f$ oraz $(x, y') \in f$, a także $(y, z) \in g$ i $(y', z') \in g$ Na podstawie definicji funkcji i wobec tego, że $f$ jest funkcją wnioskujemy, że $y = y'$. W takim razie $(y, z') \in g$. Teraz z kolei stąd, że $g$ jest funkcją wnioskujemy, że $z = z'$. □

Jeśli $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ to złożenie jest, jak łatwo zauważyć, funkcją działającą z $X$ do $Z$. Wartości złożenia oblicza się wg wzoru:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Zauważmy, że kolejność zapisywania funkcji w złożeniu, tak jak zrobiliśmy to w formalnej definicji, jest nienaturalna. Wynika to jednak stąd, że w zgodzie z tradycją w napisach „$f(x)$” argument funkcji piszemy z prawej strony, a nie z lewej.