Uzupełnienia

Dowód następującego twierdzenia został na wykładzie ledwie naszkicowany. Jak się zorientowałem, dosyć trudno go uzupełnić, dlatego przedstawiam inne, za to kompletne, rozumowanie:

TWIERDZENIE 1 *Jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$, to A jest przeliczalny.*

Dowód. Wobec tego, że zbiory skończone są przeliczalne, możemy założyć, że A jest nieskończony. Określmy $f\colon \mathbb{N} \to A$ w następujący sposób:

$$f(0) = \text{najmniejsza liczba w } A;$$

$$f(1) = \text{najmniejsza liczba w } A \setminus \{f(0)\};$$

$$f(2) = \text{najmniejsza liczba w } A \setminus \{f(0), f(1)\};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

$$f(n) = \text{najmniejsza liczba w } A \setminus \{f(0), \dots, f(n-1)\}, \text{ dla } n \geqslant 1.$$

(Funkcja f została więc określona indukcyjnie; zauważmy, że jest ona poprawnie określona, o ile w każdym niepustym podzbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza; jak wiemy, istnienie takiej liczby gwarantuje *zasada minimum*). Pokażemy, że f jest bijekcją zbioru $\mathbb{N}$ na A. By przekonać się, że f jest 1-1 wybierzmy jakąkolwiek parę $k < l$ liczb naturalnych. Zauważmy, że w zgodzie z definicją funkcji f mamy $f(l) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(l-1)\}$. Ponieważ $k < l$ pociąga $k \leqslant l - 1$, więc $f(k)$ leży pośród elementów zbioru, który odejmujemy od A, nie leży więc, w przeciwieństwie do $f(l)$, w różnicy $A \setminus \{f(0), \dots, f(l-1)\}$; w konsekwencji $f(k) \neq f(l)$. Z kolei, gdyby f nie była *na*, to $A \setminus f(\mathbb{N}) \neq \emptyset$. Niech m oznacza najmniejszą liczbę w zbiorze $A \setminus f(\mathbb{N})$. Ponieważ muszą istnieć w A liczby mniejsze niż m, bo w przeciwnym razie $m = f(0)$, co nie jest możliwe, więc pośród nich, na mocy *zasady maksimum* istnieje największa r. Oczywiście $r \in f(\mathbb{N})$. Stąd istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $f(n) = r$. Wtedy jednak z definicji f i r wnosimy, że $f(n+1) = m$, co przeczy określeniu liczby m □