Uzupełnienia dotyczące zbiorów uporządkowanych (3 lutego 2011).

Poprzedniczka tej notatki zawierała błędy! Ta pewnie zresztą też ;¬). Ćwiczenie 3 zostało zmienione, bo żądałem, byście dowodzili czegoś, co było fałszem.

Następujące twierdzenie przypomina tw. Tarskiego o odwzorowaniach izotonicznych.

Twierdzenie 1 *Jeśli każdy łańcuch A w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$ ma kres górny oraz funkcja $f\colon X \to X$ spełnia warunek*

$$\bigwedge_{x \in X} x \leqslant f(x),$$

to ma ona punkt stały; tzn. taki, że jego obraz w odwzorowaniu f jest nim samym.

Dosyć skomplikowany dowód pominiemy. Zainteresowany czytelnik może zajrzeć do książki Juliana Musielaka *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989. Wypada jedynie podkreślić, że szukany punkt stały zostaje wyznaczony za pomocą konstrukcji; w dowodzie nie używa się więc aksjomatu wyboru.

Definicja 1 Łańcuch A w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$ nazywamy *maksymalnym*, jeśli stąd że łańcuch $B \subseteq X$ zawiera A wynika, iż $B = A$. Innymi słowy, nie istnieje inny łańcuch niż A zawierający A.

Twierdzenie 2 (Hausdorff) *Jeśli A_0 jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$, to istnieje taki łańcuch maksymalny A w X, że $A_0 \subseteq A$.*

Dowód. Niech

$$\mathscr{X} = \{B \subseteq X\colon B \,\text{jest łańcuchem oraz}\, A_0 \subseteq B\}.$$

Ponieważ $A_0 \in \mathscr{X}$, więc $\mathscr{X} \neq \emptyset$. $\mathscr{X}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym za pomocą relacji zawierania $\subseteq$. Łatwo zauważyć, że każdy łańcuch $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{X}$ ma kres górny. Mianowicie, $\sup \mathscr{A} = \bigcup \mathscr{A}$. Gdyby nie istniał wspomniany łańcuch maksymalny A, to dla każdego $B \in \mathscr{X}$ zbiór $U_B := \{C \in \mathscr{X} : C \neq \emptyset$ i $B \subseteq C\}$ byłby niepusty. Z każdego ze zbiorów U_B wybierzmy jeden element $f(B)$ (aksjomat wyboru!). Określiliśmy zatem odwzorowanie

$f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, o tej własności, że dla każdego $B \in \mathscr{X}$ mamy $B \leqslant f(B)$. Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathscr{X}, \subseteq)$ oraz odwzorowanie f spełniają w rezultacie założenia twierdzenia 1. Wnosimy stąd, że odwzorowanie f ma punkt stały $D \in \mathscr{X}$. Wtedy jednak $D \in U_D$, co przeczy definicji zbioru U_D. $\square$

DEFINICJA 2 Element $x_0 \in X$ jest *elementem maksymalnym* zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$, jeśli dla każdego $x \in X$ stąd, że $x \geqslant x_0$ wynika, iż $x = x_0$.

LEMAT 3 (KURATOWSKI, ZORN) *Jeśli każdy łańuch A w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$ ma ograniczenie górne, to w X istnieje element maksymalny.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia Hausdorffa, istnieje w X łańcuch maksymalny A. Niech $b \in X$ będzie ograniczeniem górnym tego łańcucha. Gdyby istniał element c większy niż b, to c nie należałby do A i zarazem byłby większy niż elementy zbioru A. W rezultacie zbiór $A \cup \{c\}$ byłby łańcuchem zawierającym A i zarazem od A różnym, co przeczyłoby maksymalności łańcucha A. Stąd wynika, że b jest elementem maksymalnym zbioru $(X, \leqslant)$. $\square$

Przypomnijmy, że podzbiór B przestrzeni wektorowej V jest bazą tej przestrzeni, jeśli elementy zbioru B są liniowo niezależne i nie istnieje zbiór C złożony z wektorów liniowo niezależnych zawierający B i zarazem od B różny. Innymi słowy, B jest elementem maksymalnym uporządkowanej za pomocą relacji zawierania rodziny wszystkich podzbiorów złożonych z wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej V .

Ponieważ w unormowanych przestrzeniach wektorowych definiuje się jeszcze inny rodzaj baz, więc bazy przestrzeni wektorowych bywają nazywane *bazami Hamela*. Następne twierdzenie jest uogólnieniem poznanego przez nas na algebrze twierdzenia o bazach dla przestrzeni skończonego wymiaru.

TWIERDZENIE 4 (O BAZACH) *Jeśli $V \neq \{0\}$ jest przestrzenią wektorową, zaś B_0 – jej podzbiorem złożonym z wektorów liniowo niezależnych, to istnieje taka baza B przestrzeni X, że $B_0 \subseteq B$.*

Dowód. . Niech $\mathscr{B}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów przestrzenie V zawierających B_0 i złożonych z wektorów liniowo niezależnych. Rodzina $\mathscr{B}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym za pomocą relacji zawierania $\subseteq$. Jeśli $\mathscr{A}$ jest łańcuchem w $\mathscr{B}$, to oczywiście $\bigcup \mathscr{A}$ jest elementem rodziny $\mathscr{B}$, tzn. składa się z liniowo niezależnych wektorów. Element ten jest górnym ograniczeniem łańcucha $\mathscr{A}$. W takim razie, na mocy lematu Kuratowskiego–Zorna, istnieje w $\mathscr{B}$ element maksymalny B, który zarazem zawiera B_0. Ten element maksymalny to oczywiście szukana baza. $\square$

Zauważmy, że powyższe twierdzenie gwarantuje istnienie bazy w każdej niezerowej przestrzeni wektorowej V. W tym celu wystarczy wziąć jakikolwiek element niezerowy $v \in V$ i przyjąć $B_0 = \{v\}$. Można by też przyjąć, że zbiór pusty, z definicji (!), jest zbiorem złożonym z wektorów liniowo niezależnych, wtedy od razu nasze twierdzenie gwarantuje istnienie bazy przestrzeni V. Pamiętajmy jednak, że w dowodzie twierdzenia o bazach korzystaliśmy, pośrednio, z aksjomatu wyboru.

Zwróćmy uwagę, że fakt, iż B jest bazą oznacza, że każdy niezerowy wektor $x \in V$ może zostać przedstawiony jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej o niezerowych współczynnikach pewnej liczby wektorów zbioru B.

Definicja 3 Niech relacja $\leqslant$ określa na zbiorze X porządek liniowy. Powiemy, że porządek ten jest *dobry* jeśli każdy niepusty zbiór $A \subseteq X$ ma element najmniejszy. O zbiorze X mówimy też, że jest *dobrze uporządkowany* (przez $\leqslant$).

Przykłady

1. Porządek określony przez zwykłą nierówność $\leqslant$ na $\mathbb{N}$ jest porządkiem dobrym. Fakt ten wyraża znana nam zasada minimum.
2. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ nie jest dobrze uporządkowany przez $\leqslant$, ponieważ on sam nie ma elementu najmniejszego.
3. Porządek leksykograficzny $\preceq$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy zależnością

$$(k, l) \preceq (k', l') \Leftrightarrow (k < k' \vee (k = k' \wedge l \leqslant l')).$$

Porządek ten jest dobry, bo jeśli A jest niepustym podzbiorem, to jego najmniejszy element wyznacza się następująco: najpierw spośród wszystkich elementów zbioru A wyszukuje się te, które mają najmniejszą pierwszą współrzędną, a następnie spośród nich wybiera się element, którego druga współrzędna jest najmniejsza.

Uwagi i ćwiczenia:

1. W świetle przykładu 3. łatwo zauważyć, że jeśli nawet A jest podzbiorem zbioru dobrze uporządkowanego $(X, \leqslant)$ ograniczonym z góry, to nie musi

mieć elementu największego. Rzeczywiście $\mathbb{N} \times \{0\}$ jest ograniczony z góry przez $(2, 0)$, ale nie ma elementu największego; $(2, 0)$ jest jednak kresem górnym tego zbioru. Proszę wykazać, że każdy niepusty podzbiór zbioru dobrze uporządkowanego ograniczony z góry ma kres górny.
2. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Element $x \in X$ nazywamy *granicznym*, jeśli zbiór $x_< := \{y \in X : y < x\}$ jest niepusty i nie ma elementu największego. Wskaż wszystkie elementy graniczne w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. Niech $(X, \leqslant)$ oznacza zbiór dobrze uporządkowany. Określmy w $X^{\mathbb{N}}$ relację porządku $\preceq$ następująco: $f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{n \in \mathbb{N} \colon f(n) \neq g(n)\}$ jest pusty albo $f(m) < g(m)$ dla jego najmniejszego elementu m. Czy $\preceq$ jest dobrym porządkiem na $X^{\mathbb{N}}$.
4. Niech $(A_t \colon t \in T)$ – indeksowana rodzina parami rozłącznych i niepustych zbiorów. Niech dla każdego $t \in T$, $\leqslant_t$ będzie dobrym porządkiem na A_t. Niech $\leqslant_T$ będzie dobrym porządkiem na T. Określmy relację $\leqslant$ na $A = \bigcup_{t \in T} A_t$ w następujący sposób:

> $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne indeksy s i t, że $x \in A_s$ i $y \in A_t$ jeśli są równe, to $x \leqslant_t y$, a jeśli są różne to $s <_T t$.

Wykazać, że $\leqslant$ jest dobrym porządkiem na A.

Twierdzenie 5 (zasada dobrego uporządkowania) *Na każdym niepustym zbiorze X można określić dobry porządek.*

Łatwy dowód, którego szkic za chwilę podam, wynika z lematu Kuratowskiego–Zorna. Mogą też Państwo zajrzeć do podręcznika Rasiowej do rozdziału 11. Rozpatrzmy zbiór D relacji na X określony następująco: $\rho \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $Y \subseteq X$, że $\rho \subseteq Y \times Y$ i ρ jest na Y dobrym porządkiem. $(D, \subseteq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i można łatwo sprawdzić, że jeśli $C \subseteq D$ i C jest łańcuchem, to $\bigcup C \in D$ oraz $\bigcup C$ jest górnym ograniczeniem łańcucha C. W konsekwencji, w odniesieniu do $(D, \subseteq)$ ma zastosowanie lemat Kuratowskiego–Zorna gwarantujący istnienie elementu maksymalnego $\bar{\rho}$ w D. Na zakończenie pozostaje sprawdzić, że $\bar{\rho}$ zadaje dobre uporządkowanie zbioru X, a tak być musi, bo gdyby zbiór $\bar{Y}$ był właściwym podzbiorem zbioru X, to dobralibyśmy element $x \in X \setminus \bar{Y}$ i określili nowy dobry porządek $\tilde{\rho}$ na $\bar{Y} \cup \{x\}$ żądając, by $\bar{\rho} \subset \tilde{\rho}$ i by element x był w tym nowym porządku większy od wszystkich elementów zbioru $\bar{Y}$.

Z zasady dobrego uporządkowania można wywieść następujący fakt dotyczący mocy: Dla każdej pary zbiorów X, Y jedna z pary nierówności $|X| \leqslant |Y|$ lub $|Y| \leqslant |X|$ musi zachodzić.

Z zasady dobrego uporządkowania wynika też łatwo aksjomat wyboru. Proszę przeczytać, w którejkolwiek z książek ze wstępu dowód tego faktu. W rezultacie aksjomat wyboru i zasada dobrego uporządkowania są równoważne.