Konstrukcja ciała liczb wymiernych

Niech $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Określmy w X relację $\sim$ (to znaczy, $\sim \subset X \times X$):

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow kn - lm = 0.$$

Ćwiczenie Relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

Dla przykładu sprawdźmy przechodniość: Niech $(k, l) \sim (m, n)$ oraz $(m, n) \sim (r, s)$. Wtedy

$$kn - lm = 0 \qquad \text{i} \qquad ms - nr = 0.$$

Pierwszą równość pomnóżmy stronami przez s, drugą przez l i następnie dodajmy je do siebie. Dostaniemy $kns - lnr = 0$ a stąd $n(ks - lr) = 0$. Liczba n jest naturalna, więc możemy przez nią dzielić. W rezultacie otrzymamy $ks - lr = 0$; co jest równoważne z $(k, l) \sim (r, s)$.

Określmy w zbiorze klas abstrakcji $\mathbb{Q} := X/\sim$ działania dodawania $+$ oraz mnożenia $\cdot$ wzorami:

$$[(k, l)] + [(r, s)] = [(ks + lr, ls)],$$

$$[(k, l)] \cdot [(r, s)] = [(kr, ls)].$$

Należy dowieść, że działania te są dobrze określone, tzn. nie zależą od wyboru reprezentantów klas abstrakcji. Odpowiednie rozumowanie przedstawimy tylko dla dodawania:

Niech $(k, l) \sim (k', l')$ i $(r, s) \sim (r', s')$. Wtedy $kl' - lk' = 0$ oraz $rs' - sr' = 0$ Stąd

$$0 = ss'(kl' - lk') + ll'(rs' - sr') = (ks + lr)l's' - ls(k's' + l'r').$$

Na mocy definicji $\sim$, ostatnia równość pozwala stwierdzić, że $(ks + lr, ls) \sim (k's' + l'r', l's')$. Zauważmy, że $[(0, 1)]$ jest elementem neutralnym dodawania, zaś $[(1, 1)]$ mnożenia. Należałoby teraz wykazać, że zbiór $\mathbb{Q}$ z tak określonymi działaniami spełnia aksjomaty ciała. Pozostawiamy to jako ćwiczenie. Na marginesie, zauważmy, że w arytmetyce, klasy abstrakcji $[(k, l)]$ oznaczamy $\frac{k}{l}$. Dodawanie i mnożenie są więc określone tak, by zgadzały się ze znanymi nam dobrze operacjami; np.

$$\frac{k}{l} + \frac{r}{s} = [(k, l)] + [(r, s)] = [(ks + lr, ls)] = \frac{ks + lr}{ls}.$$