1. Zbadać planarność następujących grafów.

   (a) $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, $N(1) = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, $N(2) = \{4, 5, 6, 7\}$, $N(3) = \{1, 4, 5, 7\}$, $N(4) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$, $N(5) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $N(6) = \{1, 2, 4, 8\}$, $N(7) = \{2, 3\}$, $N(8) = \{1, 4, 5, 6\}$,

   (b) $V = \{1, 2, \dots, 8\}$, $N(1) = \{2, 3, 4, 7\}$, $N(2) = \{1, 5, 6\}$, $N(3) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$, $N(4) = \{1, 5, 6, 7\}$, $N(5) = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $N(6) = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $N(7) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $N(8) = \{3, 5, 6\}$.

2. Które grafy pełne dwudzielne są planarne?

3. Dla jakich wartości r, s, t, graf $K_{r,s,t}$ jest planarny?

4. Wyznaczyć wszystkie spójne regularne grafy planarne G takie, że w zanurzeniu G w płaszczyznę liczba jego ścian jest równa jego rzędowi.

5. Pokazać, że każdy graf G rzędu $n \geqslant 6$, który zawiera trzy krawędziowo rozłączne rozpinające drzewa nie jest planarny.

6. Dopełnienie maksymalnego grafu planarnego G rzędu $n \geqslant 3$ jest drzewem rzędu n. Wyznaczyć n.

7. Udowodnić, że jeżeli G jest spójnym grafem planarnym o talii $t(G) = 5$, to $|E(G)| \leqslant \frac{5|V(G)|-10}{3}$.

   Wyprowadzić stąd wniosek, że graf Petersena nie jest planarny.

   Wskazówka. *Talią* $t(G)$ grafu G nazywamy długość najkrótszego cyklu w grafie G. Należy wykorzystać wzór Eulera i zauważyć, że $5f \leqslant 2m$.

8. Niech G będzie spójnym grafem planarnym, którego talia $t(G) \geqslant 3$. Pokazać, że $|E(G)| \leqslant \frac{t(G)}{t(G)-2}(|V(G)| - 2)$.

9. Pokazać, że w dowolnym grafie planarnym istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

10. Pokazać, że jeżeli G jest grafem mającym co najmniej 11 wierzchołków, to G i $\overline{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

11. Niech G będzie spójnym grafem planarnym rzędu $n < 12$. Pokazać, że G ma wierzchołek stopnia co najwyżej 4.

12. Niech G będzie spójnym grafem planarnym rozmiaru $m < 30$. Pokazać, że G ma wierzchołek stopnia co najwyżej 4.

13. Niech G będzie grafem planarnym bez trójkątów (K_3-wolnym). Pokazać, że $\delta(G) \leqslant 3$.

14. Czy istnieje dwudzielny graf planarny, dla którego mamy $\delta(G) = 3$?

15. Wyznaczyć rozmiar maksymalnego dwudzielnego grafu planarnego rzędu n.

16. Wskazać graf G rzędu 8 taki, że G i jego dopełnienie są planarne.

    Wskazówka. Można wykorzystać konstrukcję grafów samodopełnieniowych z poprzednich ćwiczeń.

17. Dane są grafy: $G_1 = C_6 + \overline{K_r}$, $G_2 = K_4 \Box P_r$, $r \geqslant 1$. Wyznaczyć wszystkie wartości r, dla których graf G_i $(i = 1, 2)$ jest planarny.

18. Pokazać, że graf G zawiera K_3-minor $\Leftrightarrow$ G zawiera cykl.

19. Pokazać, że $P_3 \Box P_3$ zawiera K_4-minor.

20. Pokazać, że jeżeli graf spójny G jest zewnętrznie planarny i nie zawiera K_3, to $|E(G)| \leqslant \frac{3|V(G)|-4}{2}$.