INŻYNIERIA FINANSOWA- MATEMATYKA IV ROK

Lista Nr 3 (Opcje-strategie samofinansujące, Formuła Blacka-Scholes'a, parytet kupna-sprzedaży)

1. Załóżmy, że proces ceny akcji jest opisany procesem Wienera, tzn. $S_t = W_t$ dla każdego $t \in [0, T]$, a proces cen obligacji $B_t = 1$ dla każdego $t \in [0, T]$. Sprawdzić, czy podana strategia jest samofinansująca:
a) $\phi_1(t) = 1$ i $\phi_2(t) = 1$;
b) $\phi_1(t) = W_t$ i $\phi_2(t) = 1$;
c) $\phi_1(t) = e^{rt}$ i $\phi_2(t) = e^{\sigma W_t}$;

2. Rozpatrzmy europejską opcję kupna z ceną wykonania $K = 100zl$ i z terminem wygaśnięcia za 6 miesięcy. Załóżmy dodatkowo, że obecna cena akcji $S_0 = 103zl$, zmienność ceny akcji $\sigma = 15\%$ rocznie, stopa procentowa wolna od ryzyka $r = 24\%$ w skali roku. Korzystając z formuły Blacka-Scholesa obliczyć cenę opcji kupna w chwili $t = 0$.

3. Przyjmijmy, że aktualna cena akcji Polaru wynosi $10zl$ i jest modelowana geometrycznym ruchem Browna ze współczynnikiem dryfu 15% i zmiennością 20% w ciągu roku. Jaka jest bieżąca wartość opcji sprzedaży akcji Polaru z ceną wykonania $12zl$ i terminem wygaśnięcia za 12 miesięcy, jeśli aktualna stopa procentowa wynosi 20%?

4. Rozpatrzmy europejską opcję kupna na akcje Intela z ceną wykonania $30USD$ i zterminem wygaśnięcia za trzy miesiące. Aktualny kurs akcji wynosi $31USD$, natomiast bieżąca stopa procentowa oraz zmienność cen akcji wynoszą odpowiednio 5% i 10% w skali rocznej. Opisać strategie inwestora w celu zabezpieczenia krótkiej pozycji omawianej opcji kupna.

5. Wykazać, że cena opcji kupna wyrażona wzorem
$C(x,t) = x\Phi(z) - e^{-(T-t)r}K\Phi(z - \sigma\sqrt{T-t})$, gdzie $t \le T$ i $z = \frac{ln\frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, spełnia równanie Blacka-Scholesa.

6. Niech $\phi_1(t)$ i $\phi_2(t)$ oznaczają odpowiednio ilość akcji i ilość obligacji w portfelu replikującym opcję kupna na akcję w modelu B-S. Wiedząc, że ceny akcji i obligacji opisane są odpowiednio: $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ i $B_t = e^{rt}$, wyznaczyć $\phi_1(t)$ i $\phi_2(t)$.

7. Wiemy, że dla $u(t,x) \in C^{1,2}(R_+ \times R, R)$ zachodzi zależność
(*) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Pokazać, że funkcja $p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}}$, będąca gęstością zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(y,t)$, spełnia (*).