INŻYNIERIA FINANSOWA- MATEMATYKA IV ROK

Lista Nr 4 (Martyngały, Twierdzenie Girsanowa)

1. Sprawdzić, że proces $X_t = B_t + \mu t$, gdzie B_t jest ruchem Browna względem miary $\mathcal{P}$, jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu = 0$.

2. Rozważmy miarę $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}(A) = \int_A \xi_T dP$ oraz proces $\widehat{W}(t) = \frac{\eta-\delta}{\sigma} t + W(t)$. Z twierdzenia Girsanowa wynika, że $\widehat{W}(t)$ jest procesem Wienera względem $\mathcal{Q}$ oraz filtracji $(\mathcal{F}_t)$. Wykaż, że zdyskontowany proces cen $S^*(t) = S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \widehat{W}(t)}$ jest martyngałem względem $\mathcal{Q}$ oraz filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

3. Niech θ będzie procesem całkowalnym względem procesu Wienera W. Wykaż, że

$$E\left(e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds - \int_0^t \theta_s dW_s}\right) = 1,$$

a stąd uzasadnij, że równoważna miara $\mathcal{Q}$ występująca w Tw. Girsanowa jest miarą probabilistyczną. (Wsk. Korzystając ze wzoru Ito wykaż, że $e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds - \int_0^t \theta_s dW_s}$ jest martyngalem.)

4. Model zmian ceny instrumentu bazowego określony jest wzorem $S_t = 12e^{0,4W_t}$, gdzie W_t jest procesem Wienera względem miary probabilistycznej $\mathcal{P}$. Proces zdyskontowanej ceny instrumentu bazowego $Z_t = e^{-0,12t} S_t$ jest martyngałem względem miary równoważnej $\mathcal{Q}$. Znaleźć proces Wienera $\widehat{W}(t)$ określony wzgledem tej miary $\mathcal{Q}$.

5. Niech dana będzie cena instrumentu bazowego określona wzorem $U_t = U_0 e^{(\mu + r* - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$, gdzie W_t jest procesem Wienera względem miary probabilistycznej $\mathcal{P}$. Korzystając z twierdzenia Girsanowa znaleźć taki proces $\widehat{W}(t)$, że zdyskontowana cena U_t jest martyngałem.

6. Korzystając ze wzoru na warunkową wartość oczekiwaną, podanego na wykładzie, wykazać że cena $C(t)$ europejskiej opcji kupna spełnia

$$C(t) = e^{-\delta(T-t)} H(S_t),$$

gdzie

$$H(x) = E_Q\left[\max\left(xe^{(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W^*(T) - W^*(t)} - K, 0\right)\right].$$

Oblicz postać funkcji H.