IV ROK MATEMATYKI
Matematyka ubezpieczeniowa- lista 10.

1. W modelu z dwiema przyczynami wyjścia dane są intensywności: $\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{100}, \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{1}{100}, \quad t \leq 100.$
a) podaj postać gęstości rozkładu łącznego dla (T, J) oraz rozkłady brzegowe dla zm.los. T i J.
b) znajdź prawdopodobieństwa warunkowe: $h(1|T = t)$, $h(2|T = t)$.
c) oblicz $ET, E(T|J = 2)$.

2. Rozważamy 1000 osobową grupę osób 65 letnich ($l_{65}^{(\tau)} = 1000$) wraz z zadanymi prawdopodobieństwami śmierci (w ciągu roku) ze względu na dwie przyczyny 1 i 2:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08

Dla podanych wartości wieku x podaj tablicę wielkości $q_x^{(\tau)}, p_x^{(\tau)}, l_x^{(\tau)}, d_x^{(j)}, j = 1, 2$, oraz oblicz prawdopodobieństwa: ${}_2p_{65}^{(\tau)}, {}_{2|}\ q_{66}^{(1)}, {}_2\ q_{67}^{(1)}$.

3. Niech $l_0^{(\tau)} = a$ oraz $\mu_x^{(1)} = \frac{1}{a-x}, x \in [0, a), \mu_x^{(2)} = 1$. Oblicz $l_x^{(\tau)}, d_x^{(j)}, j = 1, 2$.

4. Przy założeniu stałych intensywności $\mu_x^{(j)} = -\ln p{`}_x^{(j)}$, w oparciu o tablicę "absolutnych intensywności wyjść":

x	$q{`}_x^{(1)}$	$q{`}_x^{(2)}$	$q{`}_x^{(3)}$
62	0.02	0.03	0.2
63	0.022	0.34	0.1
64	0.028	0.04	0.12

podaj tablicę prawdopodobieństw: $q_x^{(j)}, j = 1, 2, 3$, oraz $q_x^{(\tau)}$.

5. Dla ustalonego wieku x, przyczyny j, stałej k_j oraz $t \in [0, t]$, wykaż, że następujące warunki są równoważne:
a) ${}_tq_x^{(j)} = k_j {}_tq_x^{(\tau)}$,
b) $\mu_{x+t}^{(j)} = k_j \mu_{x+t}^{(\tau)}$,
c) $1 -_t q{`}_x^{(j)} = [1 -_t q_x^{(\tau)}]^{k_j}$.
(wsk.$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$)

6. Łączny rozkład wektora los. (T,J) opisany jest przez intensywności:
$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{\theta t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_t^\infty s^{\alpha-1} e^{-\beta s} ds}, \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{(1-\theta) t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_t^\infty s^{\alpha-1} e^{-\beta s} ds}$, dla $t \geq 0$ oraz stałych $\theta \in (0, 1), \alpha, \beta > 0$.

a) podaj gestości: $f(t,j), h(j), g(t)$.

b) $ET=?, Var(T)=?$

c) Ubezpieczenie dla (x) zapewnia wypłatę 1, dla j=1 oraz wypłatę 0, dla j=2. Podaj formułę na jednorazową składkę netto $\bar{A}$ w tym ubezpieczeniu.

7. Rozpatrujemy jednorazową składkę netto w 20-letnim ubezpieczeniu na życie (x) wypłacającym sumę ubezpieczenia w momencie śmierci. Wiadomo, że ubezpieczenie (i) wypłacające 1000zł bez względu na rodzaj śmierci kosztuje Kzł taniej niż ubezpieczenie (ii) wypłacajace 2000zł, gdy przyczyną śmierci jest nieszczęśliwy wypadek lub 1000zł dla śmierci z innych przyczyn. Podaj jednorazową składkę netto za ubezpieczenie (i), jeśli $\mu_{x+t}^{(NW)} = \frac{t}{100}$, $\mu_{x+t}^{(inne)} = \frac{t}{60}$.

8. Rozważamy ciągły typ ubezpieczenia na życie (x) ze składką płaconą ze stałą intensywnością przez pierwsze 20 lat ubezpieczenia. W zależności od rodzaju śmierci ubezpieczenie wypłaca:

50000 za śmierć w nieszczęśliwym wypadku (NW),

25000 za śmierć wywołaną przez określone choroby (CH),

10000 za śmierć z pozostałych przyczyn (PP).

Wiadomo, że bezwarunkowe prawdopodobieństwo śmierci w populacji, z której pochodzi (x), opisuje funkcja ${}_tq_x = 1-(0,94)^t$, a ponadto $3\mu_{x+t}^{(NW)} = 2\mu_{x+t}^{(CH)} = \mu_{x+t}^{(PP)}$. Wyznacz roczną intensywność składki w tym ubezpieczeniu, jeśli $\delta = 0,05$.