IV ROK MATEMATYKI

Matematyka ubezpieczeniowa- lista 11.

(Ciekawostki dotyczące warunkowych wartości oczekiwanych, przykłady martyngałów).

1. Niech X, Y bedą całkowalnymi zm. losowymi (na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), zaś $\mathcal{G}$ pod-σ-ciał em, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Wykaż następujace własności warunkowych wartości oczekiwanych:

a) jeśli $X = a, P.1$, to $E(X|\mathcal{G}) = a, P.1$.

b) $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}), P.1$

c) jeśli X jest $\mathcal{G}$- mierzalna oraz $E|XY| < \infty$, to $E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G}), P.1$.

d) jeśli $\mathcal{G} = \{\Phi, \Omega\}$ (tzn. $\mathcal{G}$ jest σciałem trywialnym), to $E(X|\mathcal{G}) = EX$

2.Wykaż, że jeśli X jest nieujemną zm. losową, to

$E(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty P(X > t|\mathcal{G})dt, P.1$.

Uwaga. Stąd wynikają następujące ciekawostki:

a) jeśli zm. losowa X jest niezależna od σ-ciał a $\mathcal{G}$ (istnieje takie $\sigma-$ciał o, które jest niezależne z każdą zm.losową- zastanów sie jakie(?)), to otrzymamy znany nam już wzór: $E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$

b) jeśli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna (a tak będzie np. jeśli $\mathcal{G} = \mathcal{F}$), to otrzymamy zależność: $X = \int_0^\infty I_{\{X>t\}}dt$.

c) uogólniona nierówność Markowa: $P\{|X| \geq \alpha|\mathcal{G}\} leq \frac{1}{\alpha^k} E(|X|^k|\mathcal{G})$, $\alpha > 0, k \geq 1$.

3. Uzasadnij, że jeśli ciąg $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, to EX_n =constans.

4. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $E|X_n| < \infty$, ze średnią μ i wariancją σ^2. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_i, 1 \leq i \leq n\}, n \geq 1$ oraz $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wykaż, że:

a) jeśli $\mu > 0$, to $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest podmartyngałem oraz jeśli $\mu < 0$, to $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem,

b) $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, gdzie $Y_n = S_n - n\mu, n \geq 1$,

c) jeśli $\mu = 0$, to ciąg $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, gdzie $Y_n = S_n^2 - n\sigma^2, n \geq 1$,

5.Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_i, 1 \leq i \leq n\}, n \geq 1$ oraz $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Załóżmy, że dla pewnego $s \in R$, $m(s) = E(e^{sX_1}) < \infty$. Wykaż, że ciąg $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, jeśli $Y_n = e^{sS_n}(m(s))^{-n}$.