IV ROK MATEMATYKI
**Matematyka ubezpieczeniowa - Lista 12**

1. Załóżmy, że odstępy między zgłoszeniami szkód: $T_1, T_2, ...$ są nieujemnymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie.

Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

a) Wykazać, że jeśli odstępy miedzy zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha > 0$, to proces liczący $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}, t > 0; N(0) = 0$ jest procesem Poissona o intensywności $\alpha$.

b) Wykazać, że jeśli odstępy miedzy zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha > 0$, to $P\{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t} F^{*k}(x), x \geq 0, t > 0$.

c) Niech $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t > 0; S(0) = 0$. Wykaż, że proces $(S(t), t \geq 0)$ ma niezależne przyrosty.

d) Niech $\delta(t) = S_{N(t)+1} - t$ oznacza czas oczekiwania na kolejne (pierwsze) zgłoszenie po chwili $t$. Wykaż, że przy założeniach jak wyżej w a) zmienne losowe $N(t)$ i $\delta(t)$ są niezależne oraz zm. los. $\delta(t)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha$ ( rozkład tej zmiennej los. nie zależy od czasu $t$).

2. Momenty zajścia kolejnych szkód $T_1 < T_2 < ... < T_n < ...$ tworzą proces Poissona na przedziale $(0, \infty)$, o intensywności $\lambda$, a więc: $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Każda szkoda, niezależnie od pozostałych, jest likwidowana po upływie pewnego losowego okresu czasu. Zatem momenty likwidacji są zmiennymi losowymi postaci: $\widetilde{T}_1 = T_1 + D_1, \widetilde{T}_2 = T_2 + D_2, ..., \widetilde{T}_n = T_n + D_n, ...$ przy czym odstępy czasu między zajściem a likwidacją szkód $D_i$ są niezależne nawzajem oraz od $T_1, T_2, ...$ i mają taki sam rozkład. Zakładamy, że jest to też rozkład wykładniczy o takiej samej wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że dla pewnego n likwidacja szkody $(n+1)$-szej poprzedzi likwidację szkody $n$-tej, czyli $P(\widetilde{T}_{n+1} < \widetilde{T}_n)$.

3. Załóżmy, że odstępy między zgłoszeniami szkód: $T_1, T_2, ...$ są nieujemnymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Niech $N(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\}, t > 0, N(0) = 0$ oraz załóżmy, że ciąg $X_1, X_2, ...$ jest ciągiem niezależnych (nieujemnych) zm. losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuanta $F$ (ciągiem wypłat), niezależnym od procesu $(N(t))$. Załóżmy ponadto, że zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ spełniają dodatkowo: $\{\sum_{i=1}^{k} X_i \leq x\} = \{\max_{1 \leq i \leq k} X_i \leq x\}$, dla każdego $x \geq 0$ oraz $k \geq 1$. Obliczyć rozkład sumaryczny wypłat odszkodowań (do chwili $t > 0$), tzn. $P\{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\}$.

4. Niech $X_1$ oraz $X_2$ oznaczają dwa ryzyka (zmienne losowe) niezależne o tym samym rozkładzie danym dystrybuantą

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 0 \\ 0.6 + 0.3x & \text{gdy } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że ich suma nie przkroczy liczby $\frac{2}{3}$, czyli $(F * F)(\frac{2}{3})$.

5. Pokazać, że jeśli $N(t), t \geq 0$ jest procesem Poissona o intensywności $\alpha > 0$, to process $N(t) - \alpha t, t \geq 0$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N(s) : 0 \leq s \leq t\}, t \geq 0$.

6. Załóżmy, że $(X_n(t))_{t\geq 0}$ jest ciągiem $L^p-$ martyngałów (p$\geq$ 1)( tj. $E|X_n(t)|^p < \infty$ dla wszystkich $t \geq 0, n \geq 1$) względem (tej samej filtracji) $(F_t)_{t\geq 0}$. Niech $(X_t)$ bedzie procesem stochastycznym takim, że $X_n(t) \to X_t$ w $L^p$, dla każdego $t \geq 0$. Wykazać, że $(X_t)$ jest rownież martyngałem względem danej filtracji.

(Wsk.: nierówność Jensena).

7. Niech dane będą trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku: $T$- czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$, $D$- czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $\beta^{-1}$, $Y$- wartość szkody. Przyjmijmy, że jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej $T$ i $D$) jest 1 rok. Ponadto zmienne $T$ oraz $D$ są nawzajem niezależne, a także wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i długo trwajacej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie: $E(Y|D, T) = E(Y|D) = exp(rD), \quad gdzie \;\; 0 < r < \beta$. Obliczyć $E(Y|T+D > 1)$, czyli oczekiwana wartość szkody, do której doszło w ciągu tego roku, ale która przed końcem roku nie została zlikwidowana.

8. Przy założeniu, że odstępy czasu między zgłoszeniami szkód są niezależnymi zm. los. o rozkładzie $\chi^2_{10}$ znaleźć 95% przedział ufności dla liczby szkód w ciągu roku ($tzn. = 365$).