IV ROK MATEMATYKI
Matematyka ubezpieczeniowa- Lista 13

1. W klasycznym modelu ryzyka Lunndberga, odstępy między zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś wielkości odszkodowań mają rozkład χ^2_2. Przyjmując, że intensywność wpływu składki jest stała w czasie i wynosi 20, oblicz minimalną rezerwę początkową, przy której prawdopodobieństwo ruiny (w nieskończonym horyzoncie czasu) nie przekracza 0.005.

2. Niech $W(t), t \geq 0$ będzie procesem Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}, t \geq 0$. Definiujemy proces $Y(t) = W(t) + \frac{a}{2}t$, dla $t \geq 0, a > 0$.Wykaż, że $\Psi(u) \leq e^{-au}$, gdzie $\Psi(u) = P\{\inf_{t\geq 0}[u + Y(t)] < 0\}$, tzn. $\Psi(u)$ jest prawdopod. ruiny dla procesu "rezerwy":$u + Y(t), t \geq 0$.

Wsk. Dowód przebiega w podobny sposób do podanego na wykładzie tzn.:
a) Wykazać, że proces $(Y(t), t \geq 0)$ ma niezależne przyrosty.
b) Znaleźć postać funkcji $g(r)$, dla której: $E[e^{-rY(t)}] = e^{tg(r)}$.
c) Ostatecznie, wystarczy stwierdzić, że $R = \sup\{r \geq 0 : g(r) \leq 0\} = a$.

3. Niech $(X_t, t \geq 0)$ będzie procesem o przyrostach niezależnych, $X_0 = 0$. "Załóżmy" (w rzeczywistości można to wykazać-tzw formuła Levy'ego-Chinczyna), że istnieje pewna funkcja $\psi_t(u)$ o wartościach zespolonych taka, że $E(e^{iuX_t}) = e^{\psi_t(u)}$. Wykazać, że proces $M_t(u) = e^{iuX_t - \psi_t(u)}, t \geq 0$ jest martyngałem (o wartościach zespolonych) względem naturalnej filtracji procesu $(X_t, t \geq 0)$. Określić postać funkcji $\psi_t(u)$, gdy X jest procesem Wienera lub procesem Poissona.

4. Proces nadwyżki towarzystwa ubezpieczeniowego ma postać: $U_t = u + (c - du)t - S_t$, gdzie skumulowane wypłay odszkodowań S_t mają dla każdego $t > 0$ rozkład normalny $(t\mu, t\sigma^2)$, w zamian za kapitał u udziałowcy otrzymują dywidendę wypłacaną w sposób ciągły z intensywnością du, c jest intensywnością składki płaconej przez ubezpieczonych, z czego $c - du$ pozostaje w towarzystwie. Przyjmijmy następujące wartości liczbowe wybranych parametrów procesu: stopa dywidendy wynosi $d = 5\%$, parametry procesu S_t wynoszą $\mu = 300, \sigma^2 = 2000$. Niech $\psi(u, c)$ oznacza funkcję (dwóch argumentów- kapitału początkowego i intensywności płaconej składki) prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu. Znaleźć (dobierając odpowiednio optymalną wysokość kapitału początkowego) najmniejszą wartość $c*$ spośród takich wartości c, dla których zachodzi $\psi(u, c) = exp(-\frac{9}{2})$.

5. Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci: $U_n = u + cn - S_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o rozkładzie wykładniczym, danym na półosi dodatniej gęstością $f_W(x) = \frac{1}{2}exp(-\frac{x}{2})$, zaś nadwyżka początkowa $u = 3$, a składka za okres czasu wynosi $c = 3$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w

ciągu dwóch pierwszych okresów, a więc iż zajdzie zdarzenie
$\{U_1 < 0 \;\; lub \;\; U_2 < 0\}$.

6. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z rozkładem wartości pojedynczej szkody o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem $f(y) = \frac{4}{10} exp(-y) + \frac{12}{10} exp(-2y)$. Wiadomo, że przy tych założeniach prawdopodobieństwo ruiny jako funkcja kapitału początkowego u wyraża się dla $u \geq 0$ wzorem $\psi(u) = a_1 exp(-r_1 u) + a_2 exp(-r_2 u)$. Znaleźć parametr r_2 jeśli wiadomo, że $\psi(u) = \frac{3}{175} exp(-\frac{1}{5} u) + \frac{144}{175} exp(-r_2 u)$.