

IV ROK MATEMATYKI

Matematyka ubezpieczeniowa- lista 4.

1. Wykaż równość:  $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v_t^t p_x dt$ .

2. W pewnej populacji długość życia ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\mu_x = 0.04$ . Niech intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0.06$ . Oblicz  $Var(\bar{a}_{\overline{T}|})$  oraz  $P\{\bar{a}_{\overline{T}|} \geq \bar{a}_x\}$ .

3. Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia rentowego dla osób w wieku 60-lat z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem  $\omega = 90$ . Ubezpieczenie to zaczyna wypłacać rentę z intensywnością 1000zł na rok od momentu śmierci aż do hipotetycznego wieku  $\omega$ . Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, przyjmując  $\delta = 0,04$ .

4. Niech  $\bar{a}_x(\delta)$  oznacza wartość ciągłej renty życiowej wyznaczonej przy intensywności oprocentowania  $\delta$ . Dla pewnej populacji wiadomo, że  $\bar{a}_x(0,04) = 10,90$ . Wyznacz wartość, której na pewno nie przekroczy  $\bar{a}_x(0,05)$ .

5. Intensywność śmiertelności w populacji  $A$  jest dla każdego wieku wyższa o stałą  $\delta > 0$  niż w populacji  $B$ , czyli  $\mu_{x+t}^A = \mu_{x+t}^B + \delta$ . Niech symbole  $\bar{A}_x(\lambda)$  oraz  $\bar{a}_x(\lambda)$  oznaczają odpowiednio składki obliczone przy intensywności oprocentowania  $\lambda$ . Wykaż, że  $\bar{A}_x^B(\delta) + 2\delta\bar{a}_x^A(0) = 1$ .

6. Wykaż, że:

a)  $\frac{d\bar{a}_x}{dx} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_x - 1$

b)  $\frac{\partial \bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\partial x} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x)$

c)  $\frac{\partial ({}_n\bar{a}_x)}{\partial n} = -{}_nE_x$ .

7. Niech  $Y$  oznacza zdyskontowaną wartość renty terminowej  $n$ -letniej, płatnej w sposób ciągły tzn.  $Y = \bar{a}_{\overline{T}|} I_{\{0 \leq T < n\}} + \bar{a}_{\overline{n}|} I_{\{T \geq n\}}$ . Wykaż, że

$$Var(Y) = \frac{2}{\delta} [\bar{a}_{x:\overline{n}|} - 2\bar{a}_{x:\overline{n}|}] - \bar{a}_{x:\overline{n}|}^2.$$

8. Znaleźć wariancję zdyskontowanej wartości wypłaty w ubezpieczeniu na wypadek śmierci, terminowym 10 letnim dla (x), płatnym na koniec roku śmierci, wiedząc, że wariancja wypłaty w analogicznym ubezpieczeniu na życie jest równa  $W$  oraz dane są ponadto:  $v, {}_{10}p_x, \ddot{a}_{x:\overline{10}|}$ .

9. Osobie czterdziestoletniej wystawiono polisę na rentę jednostkową, dożywotnią, odroczoną o 20 lat, płatną z góry. Wiadomo, że:  $A_{40} = 0.112$ ,  $\ddot{s}_{40:\overline{20}|} = 77.7$ ,  ${}_{20}p_{40} = 0.78$ ,  $i = 0.1$ . Oblicz jednorazową składkę netto w takim ubezpieczeniu.

10. Wykaż związki:  $a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$ ,  ${}_n\bar{a}_x = \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_x}{d} - {}_nE_x$ ,  
 ${}_n\bar{a}_x = {}_nE_x a_{x+n}$ ,  $A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$ ,  $A_x = v\ddot{a}_x - a_x$