IV ROK MATEMATYKI
Matematyka ubezpieczeniowa- lista 7.

1. Rozważmy ogólny schemat ubezpieczenia bezterminowego dla (x), przez b_t oznaczamy kwotę wypłaty, jeśli śmierć nastąpi w wieku $x+t$, przez π_t oznaczamy intensywność składki (płatnej w sposób ciągły) w chwili t.

Wykaż, że rezerwa ${}_t\bar{V}$ spełnia następujące równanie (tzw. równanie różniczkowe Thiele'go): $\frac{d_t\bar{V}}{dt} + (b_t -_t \bar{V})\mu_{x+t} = \pi_t + \delta_t\bar{V}$.

2. Wykaż, że dla $0 < t \leq m$ zachodzą równości:
a) $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x^1:\overline{m}|}) + \bar{P}_{x:\overline{m}|^1}\ {}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|})$,
b) ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|}) =_t \bar{V}(\bar{A}_{x^1:\overline{m}|}) +_t \bar{V}_{x:\overline{m}|^1}\ {}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|})$

3. Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia na życie ze składką płatną przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością. Kupujacy polisę w wieku (50) pochodzą z populacji de Moivre'a z $\omega = 100$. Wyznacz moment, w którym rezerwa liczona na jedną polisę wystawioną osiągnie wartość maksymalną. Przyjmij, że $\delta = 0,02$.

4. Wykaż, że dla $0 < k \leq m$ zachodzi:
${}_kV_{x:\overline{m+n}|} =_k V_{x^1:\overline{m}|} +_k V_{x:\overline{m}|^1}\ {}_mV_{x:\overline{m+n}|}$

5. Wykaż, że dla $h < n-j$ zachodzi: ${}_jV_{x:\overline{n}|} = A_{x+j^1:\overline{h}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} +_h E_{x+j}\ {}_{j+h}V_{x:\overline{n}|}$. Stąd kładąc $j = 0$, wyprowadź formułę retrospektywną na rezerwę składek: ${}_hV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\ddot{s}_{x:\overline{h}|} -_h k_x$, gdzie ${}_hk_x = \frac{A_{x^1:\overline{n}|}}{{}_hE_x}$.

6. Pokazać, że w ubezpieczeniu na wypadek śmierci (bezterminowym) na sumę jednostkową, płatnym na koniec roku śmierci rezerwa po k-latach spełnia równanie: ${}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{P_x - vq_{x+h}}{{}_{k-h}E_{x+h}}$.

7. Przy założeniu jednostajnej umieralnośi w ciągu roku(o ile to konieczne), wyraź w jezyku funkcji komutacyjnych następujące rezerwy (dla $k < h$): ${}_kV_x$, ${}^h_kV({}_{m|}\bar{A}_x)$, ${}^h_kV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, ${}^h_kV^{(m)}{}_{x:\overline{n}|}$.

8. Dla ubezpieczenia płatnego w chwili śmierci z rosnącą (w sposób ciągły) sumą ubezpieczenia i składką roczną płatną z góry wykaż, że rezerwa ${}_tV((\bar{I}\bar{A})_x)$ spełnia równanie:

$$ {}_tV((\bar{I}\bar{A})_x) + (\bar{I}\bar{A})_x \frac{1 - A_{x+t}}{1 - A_x} = (\bar{I}\bar{A})_{x+t} + t\bar{A}_{x+t}. $$

9. W oparciu o tablice funkcji komutacyjnych (i =6%) oblicz rezerwy składek: ${}_{10}V_{35}, {}_{10}V_{35^1:\overline{30}|}, {}_{10}V_{35:\overline{30}|}$.

10. Oblicz wartość składki $P_{x^1:\overline{n}|}$, jeśli wiadomo, że: $P_x = 0.024$, ${}_nV_x = 0.08$, $P_{x:\overline{n}|^1} = 0.2$.

11. Oblicz ${}_{10}V_{45}$ o ile wiadomo, że ${}_{10}V_{35} = 0.15$ oraz ${}_{20}V_{35} = 0.354$.

12. Dla populacji z wykładniczym rozkładem czasu trwania życia rozważmy ciągły typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie ze świadczeniem 1 zł i składką płatną przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością. Z pewnych względów ubezpieczyciel tworzy z opóźnieniem rezerwę netto, stosując zasadę:

$$ {}_t\overline{V} * (\overline{A}_{x:\overline{20}|}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 2 \\ {}_{t-2}\overline{V}(\overline{A}_{x+2:\overline{20-2}|}) & 2 < t \leq 20 \end{array} \right\} $$

Dla jakiego $t > 2$ zachodzi ${}_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) -_t \overline{V} * (\overline{A}_{x:\overline{20}|}) = 0,02$, jeśli $\mu + \delta = 0,1$.

13. Osoba 30-letnia zawarła polisę ubezpieczenia terminowego na życie z terminem 20 lat na sumę 100 tys., płatną na koniec roku śmierci. Warunki polisy zobowiazują ubezpieczonego do opłaty składki raz w roku z góry, w stałej wysokości przez 20 lat. Wyznacz rezerwę (prospektywną i retrospektywną) dla takiego ubezpieczenia po 10 latach od chwili jego zawarcia, w oparciu o tablice funkcji komutacyjnych przy stopie $i = 6\%$.