Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania Operacyjne

Laboratorium

Elementy teorii gier

1. Rozwiązać dokładnie grę dwuosobową o sumie zero:

Strategie		Gracz B			
		b_1	b_2	b_3	b_4
Gracz A	a_1	1	3	5	8
	a_2	-2	3	4	5
	a_3	7	-1	1	0

2. Dana jest macierz wypłat dla pewnej gry dwuosobowej o sumie zero:

Strategie		Gracz B		
		b_1	b_2	b_3
Gracz A	a_1	2	-1	7
	a_2	4	α	5
	a_3	3	5	9

   a) Dla jakich wartoci parametru α gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych, a dla jakich w zbiorze strategii mieszanych?
   b) Przyjmując dowolną wartość parametru α sprowadzić grę do ZPL i rozwiązać.

3. Zaimplementować algorytm Browna i zastosować go do rozwiązania zadania 1. Zbadać jak wpływa liczba wykonanych kroków algorytmu na jakość rozwiązania.

4. Gra dwuosobowa o sumie zero jest opisana następującą macierzą zysków gracza A:

$A \backslash B$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	-50	-10	-10	0	10	-100	-50	100
a_2	-80	-10	150	-60	160	-120	40	-40
a_3	-20	50	-60	50	100	30	70	-140
a_4	70	-60	-130	60	-160	-40	210	30
a_5	-90	-10	50	-20	-10	10	-140	160
a_6	-120	-40	-90	-210	-70	-40	-100	70

   a) znaleźć wszystkie strategie zdominowane,
   b) rozwiązać grę w sposób dokładny,
   c) znaleźć rozwiązanie z użyciem algorytmu Browna.

5. Gracze A i B uczestnicząc w pewnej grze mogą obstawić w każdym posunięciu dowolnie stawki s_A i s_B ze zbioru $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Wygrana gracza A (a strata B) wynosi $(s_A - s_B)^2 - 3$. Oprócz wyboru stawki, każdy z graczy może zdecydować niezależnie od drugiego, czy stawkę przeciwnika pozostawić bez zmian lub podwyższyć albo obniżyć o 1. Znaleźć rozwiązanie gry, gdy decyzja o zmianie stawki przeciwnika podejmowana jest:

   a) bez znajomości stawki jaką obstawił oponent.
   b) po wcześniejszym ujawnieniu stawki przeciwnika.

6. W podanej poniżej grze, gracz A nie może stosować żadnej ze swoich strategii rzadziej niż dwa na dziesięć razy, a gracz B częściej niż pięć na dziesięć razy. Rozwiązać grę.

$A \backslash B$	b_1	b_2	b_3
a_1	5	3	2
a_2	-3	4	1
a_3	-2	3	6

7. Rolnik posiadający glebę klasy III ma wybrać pod uprawę jeden z trzech rodzajów zboża. Plony tych zbóż z 1 ha w kwintalach, w zależności od warunków klimatycznych w przyszłym roku, zestawiono w tabeli poniżej. Który z rodzajów zbóż powinien wybrać pod uprawę?

Rodzaj zboża	Stany natury			
	I	II	III	IV
Żyto	24,5	18,0	18,0	16,0
Pszenica	18,0	32,0	24,0	21,0
Jęczmień	15,0	19,0	26,0	19,0

Zastosować kryteria Walda (*reguła maxmin*), Hurwicza ($\gamma = 0,8$) oraz Savage'a.

8. Przedsiębiorstwo przemysłowe może produkować jeden z czterech rodzajów wyrobów A, B, C, D. W tabeli poniżej zebrano zyski (straty) ze sprzedaży tych wyrobów w zależności od popytu kształtowanego przez modę (stan koniunktury I,II,III,IV). Wybrać wyrób do produkcji stosując kryteria Bayesa oraz Savage'a.

Typ wyrobu	Stan koniunktury			
	I	II	III	IV
A	5	15	10	0
B	10	10	-20	30
C	40	0	50	-30
D	60	0	20	10

9. Zrzeszenie przedsiębiorstw zamierza zwiększyć swój potencjał przemysłowy dzięki wybudowaniu nowego zakładu. Istnieją cztery warianty planu inwestycyjnego: 5, 10, 15 i 20 mln zł, które w zależności od szeregu czynników losowych (stanów natury) mogą dać różne przyrosty produkcji. Wyróżniono 4 istotnie różne stany czynników losowych (tabela poniżej). Jako kryterium przyjęto uzyskanie możliwie wysokiego przyrostu produkcji w stosunku do poniesionych nakładów inwestycyjnych.

Warianty i nakłady inwestycyjne (w mln zł)		Udział przyrostu produkcji w poniesionych nakładach w przypadku wystąpienia stanu natury:			
		I	II	III	IV
w_1	5	0,5	0,6	0,4	0,5
w_2	10	0,1	0,7	0,4	0,7
w_3	15	0,8	0,2	0,5	0,5
w_4	20	0,1	0,8	0,5	0,7

Który wariant inwestycyjny powinien wybrać dyrektor zrzeszenia

a) będąc pesymistą?

b) będąc optymistą?

10. W funduszu inwestycyjnym opracowano trzy strategie lokowania środków na giełdzie w zależności od trzech możliwych stanów indeksu WIG20. Stopa zwrotu dla różnych możliwych scenariuszy podana jest w tabeli poniżej.

Strategia lokowania	Stan indeksu WIG20		
	A	B	C
I	$10 + 20\gamma$	17	18
II	16	18	15
III	$18 - \gamma$	18	$25\gamma^2 + 11$

Na zebraniu rady nadzorczej do wyboru najlepszego wariantu inwestycyjnego zdecydowano się wybrać kryterium Hurwicza, ale ponieważ stopień ryzyka przy inwestowaniu wpływa na stopę zwrotu, nie określono z góry współczynnika ostrożności γ. Znaleźć najbardziej korzystny wariant inwestycyjny oraz określić wartość współczynnika γ maksymalizującego wygraną w grze.

11. Pewnego dnia ojciec, zamiast wypłacić synowi jak zwykle kieszonkowe, zaproponował mu następującą grę: Do dwóch kapeluszy ojciec wrzucił razem pięć banknotów 10 złotowych. Syn, nie wiedząc jak ojciec rozmieścił banknoty w kapeluszach, może w nich rozmieścić dowolnie pięć banknotów 100 złotowych. Następnie, gdy syn nie patrzy ojciec może dokonać zamiany kapeluszy, a potem syn wybiera jeden z nich i wyciąga pojedynczy banknot. Jeżeli jest to banknot 100 złotowy to stanowi on kieszonkowe syna, ale gdy jest to nominał 10 zł to syn nie dostaje nic. W jaki sposób syn powinien rozmieścić banknoty, żeby zmaksymalizować szanse na swoje kieszonkowe? Rozpisać tabelę wypłat i rozwiązać grę.

12. Superagent Hans Kloss musi przesłać do Centrali tajną wiadomość o planach Wermachtu w trakcie następnego uderzenia. Radiostacja Centrali prowadzi nasłuch każdego dnia od losowego momentu pomiędzy godziną 20:00 a 21:00 przez 10 minut. Poprzedniego wieczoru w kantynie Hermann Brunner wygadał się Hansowi, że Gestapo będzie także prowadzić nasłuch w tych samych godzinach począwszy od dowolnie wybranej chwili przez 20 minut. Sprytny agent przygotował zatem drugą fałszywą wiadomość, która ma wprowadzić Gestapo w błąd. Hans może wysyłać wiadomości pojedynczo w odstępach 25 minutowych o godzinie: 20:05, 20:30 lub 20:55. Klossowi zależy, żeby obie wiadomości trafiły do adresatów (prawdziwa do Centrali, a fałszywa do Gestapo) tak, żeby nie zostały podsłuchane przez drugą stronę (prawdziwa przez Gestapo, a fałszywa przez Centralę). Ponieważ jednak za najważniejsze zadanie uznał przekazanie wiadomości prawdziwej, to utworzył sobie ranking istotności potencjalnych sytuacji podany w tabeli poniżej, przy czym niedopuszczenie do podsłuchania wiadomości podwyższa jej ranking o 3, a podsłuchanie obniża o 4.

Wiadomość	prawdziwa	fałszywa
przekazana	3	2
nieprzekazana	-1	0

Istnieje ponadto możliwość niewysłania wiadomości, która w rankingu ma wartość neutralną 0, gdy Gestapo nasłuchuje i -1 w przeciwnym razie. W jakiej kolejności i o jakich porach agent J-23 powinien wysyłać wiadomości, żeby zmaksymalizować oczekiwany wynik w niebezpiecznej grze o stawce „większej niż życie”, którą prowadzi. Utworzyć tabelę wypłat gry, a następnie ją rozwiązać.