METODA SYMPLEKS

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

WSTĘP

- Algorytm Sympleks – najpotężniejsza metoda rozwiązywania programów liniowych

- Metoda generuje ciąg dopuszczalnych rozwiązań $\boldsymbol{x}^k$ w taki sposób, aby kolejne rozwiązania były lepsze (w przypadku degeneracji niegorsze) od poprzednich

- Dane o rozwiązaniu bazowym $\boldsymbol{x}^k$ (k-ta iteracja) są gromadzone w tablicy sympleksowej $\mathbf{Y}_k$

Tablica sympleksowa

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_k & \vdots & \boldsymbol{b}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -(\boldsymbol{c}^k)^T & \vdots & z_0^k \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{b}^k = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}^k = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}_k^T \boldsymbol{c}_B^k, \quad z_0^k = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k$$

$\boldsymbol{B}_k$ – macierz bazowa

$\boldsymbol{c}_B^k$ – wektor kosztów bazowych (wektor złożony ze współczynników c_j odpowiadającym zmiennym bazowym)

$\boldsymbol{c}^k$ – wektor kosztów zredukowanych (powstaje w wyniku eliminacji z funkcji celu aktualnych zmiennych bazowych

Algorytm SYMPLEKS

Dane: Początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe $\boldsymbol{x}^0$ i tablica $\mathbf{Y}_0$

Krok 1: Podstaw $k := 0$

Krok 2: Sprawdź kryterium stopu $y^k_{m+1,j} = -c^k_j \leqslant 0$ dla $j = 1, \ldots, n$. Jeżeli tak, to znaleziono optymalne rozwiązanie $\hat{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{b}^k$, w przeciwnym razie idź do kroku 3

Krok 3: Wyznacz indeks s, $1 \leqslant s \leqslant n$, kolumny macierzy $\boldsymbol{A}$ wprowadzonej do bazy (s jest indeksem zmiennej niebazowej, która stanie się bazową)

$$y^k_{m+1,s} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} y^k_{m+1,j}$$

Krok 4: Sprawdź, czy jest spełnione kryterium nieograniczoności

$$y^k_{i,s} \leqslant 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

Jeżeli tak, to ZPL jest nieograniczone, w przeciwnym razie kontynuuj obliczenia

Algorytm SYMPLEKS - cd

Krok 5: Wyznacz indeks r, $1 \leqslant r \leqslant m$, kolumny macierzy $\boldsymbol{B}_k$ usuwanej z bazy

$$\frac{y^k_{r,n+1}}{y^k_{r,s}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \frac{y^k_{i,n+1}}{y^k_{i,s}} : y^k_{i,s} > 0 \right\}$$

Krok 6: Zmień zmienne bazowe zastępując współrzędną r wektora $\boldsymbol{x}_b$ współrzędną $\boldsymbol{x}_s$.
Wyznacz nową tablicę sympleksową $\mathbf{Y}_{k+1}$ stosując przekształcenia

$$y^{k+1}_{i,j} = y^k_{i,j} - \frac{y^k_{i,s} y^k_{r,j}}{y^k_{r,s}} \qquad i = 1, \ldots, m+1, \quad i \neq r, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

$$y^{k+1}_{r,j} = \frac{y^k_{r,j}}{y^k_{r,s}}, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

Krok 7: Podstaw $k := k + 1$ i przejdź do kroku 2.

Algorytm sympleks – właściwości

① Jeżeli w trakcie obliczeń metodą sympleksową nie wystąpi zdegenerowane rozwiązanie bazowe, a rozwiązanie zadania istnieje (nie występuje nieograniczoność), to w skończonej liczbie iteracji uzyska się optymalne rozwiązanie bazowe

② Rozpoczęcie obliczeń metodą sympleksową jest uwarunkowane znajomością początkowego dopuszczalnego rozwiązania bazowego

③ Jeśli układ równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ma postać kanoniczną to wtedy bardzo łatwo można określić początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe

Postać kanoniczna

Układ równań $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ma postać kanoniczną, jeżeli w macierzy A można znaleźć macierz bazową składającą się z wektorów jednostkowych

Przykład 2.1. Rozważmy układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ ma postać

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kolumny $\boldsymbol{a}^3$ i $\boldsymbol{a}^4$ tworzą jednostkową macierz bazową, którek odpowiada rozwiązanie

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

DWUFAZOWA METODA SYMPLEKSOWA

- Jeżeli początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe nie jest łatwo dostępne, to można je wygenerować rozwiązując następujące zadanie pomocnicze

$$\begin{gathered}\min[w = \mathbf{1}^T \boldsymbol{x}_a] \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0, \;\; \boldsymbol{x}_a \geqslant 0\end{gathered}$$

gdzie

$\boldsymbol{b} \geqslant 0$

$\boldsymbol{x}_a$ – m-wymiarowy wektorem zmiennych sztucznych

$\mathbf{1}$ – m-wymiarowy wektor jednostkowy

$\boldsymbol{I}$ – macierz jednostkowa o wymiarach $m \times n$

- Początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe zadania pomocniczego

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x}_a^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

- Tablica sympleksowa

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \vdots & \boldsymbol{b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{1}^T\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{1}^T\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie zadania pomocniczego nosi nazwę fazy I

- Po zakończeniu fazy I mogą wystąpić przypadki:
  1. $\hat{w} > 0$ (pusty zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania początkowego)
  2. $\hat{w} = 0$ i wśród zmiennych bazowych nie występują zmienne sztuczne, wyznaczono początkowe rozwiązanie bazowe i tablice sympleksową
  3. $\hat{w} = 0$, ale wśród zmiennych bazowych występują zmienne sztuczne
     (a) zmienna bazowa x_{B_i} jest zmienną sztuczną, oraz $y_{i,j} = 0, \;\; j = 1, \ldots, n$ w zadaniu początkowym występuje redundancja, wiersz o numerze i jest usuwany z tablicy
     (b) zmienna bazowa x_{B_i} jest zmienną sztuczną, oraz $y_{i,j} \neq 0$, dla pewnego $j \leqslant n$. Zastępujemy zmienną x_{B_i} zmienną x_j i wyznaczamy nową tablicę sympleksową. Uzyskane rozwiązanie będzie zdegenerowane
- W przypadku 2 oraz po usunięciu sztucznych zmiennych bazowych w przypadku 3 realizuję się fazę II – rozwiązywanie zadania uzyskanego w fazie I

ZADANIA

Przykład 2.2. Zakład produkuje dwa wyroby, które są wykonywane na dwóch obrabiarkach i na frezarce. Czas pracy tych maszyn jest ograniczony i wynosi odpowiednio dla obrabiarki $O_1 - -33000h$, dla obrabiarki $O_2 - -13000h$ i dla frezarki $F - -80000h$. Zużycie czasu pracy maszyn (w h) na produkcję każdego z 2 wyrobów przedstawia poniższa tablica

Maszyny	Zużycie czasu pracy na jednostkę wyrobu	
	I	II
O_1	3	1
O_2	1	1
F	5	8

Zysk ze sprzedaży wyrobu I wynosi 1000zł, ze sprzedaży wyrobu II - 3000zł. Z analizy sprzedaży z lat ubiegłych wynika, że wyrobu II nie będzie można sprzedać więcej niż 7000 szt. Zaplanować strukturę asortymentową produkcji tak, aby przy przyjętych ograniczeniach zysk ze sprzedaży był jak największy. Czy optymalna struktura asortymentowa ulegnie zmianie, jeśli dzięki importowi surowca zysk ze sprzedaży wyrobu I wzrośnie do 4000zł?

- Funkcja celu
  niech x_1 - liczba wyrobu I, x_2 - liczba wyrobu II, wtedy

$$\max[z = 1000x_1 + 3000x_2]$$

- Ograniczenia

czas pracy obrabiarki O_1	:	$3x_1 + x_2 \leqslant 33000$
czas pracy obrabiarki O_2	:	$x_1 + x_2 \leqslant 13000$
czas pracy frezarki F	:	$5x_1 + 8x_2 \leqslant 80000$
ograniczenie liczby sprzedanych wyrobów typu II	:	$x_2 \leqslant 7000$

- Postać problemu

$$\begin{array}{rcrcr}
\max & [z = 1000x_1 + 3000x_2] & & & \\
3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 33000 \\
x_1 & + & x_2 & \leqslant & 13000 \\
5x_1 & + & 8x_2 & \leqslant & 80000 \\
 & & x_2 & \leqslant & 7000 \\
\multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geqslant 0}
\end{array}$$

- Postać standardowa

$$\min[z = -1000x_1 - 3000x_2]$$

$$\begin{array}{l}
3x_1 + x_2 + x_3 = 33000 \\
x_1 + x_2 + x_4 = 13000 \\
5x_1 + 8x_2 + x_5 = 80000 \\
x_2 + x_6 = 7000 \\
x_i \geqslant 0, \quad i = 1 \ldots 6
\end{array}$$

Jest to postać kanoniczna, więc macierz bazowa: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$
skojarzony z nią wektor bazowy: $\boldsymbol{x}_B^0 = [x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T = [33000\ 13000\ 80000\ 7000]^T$

$$\mathbf{Y}^0 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 33000 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 13000 \\ 5 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 1 & 0 & 80000 \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{7000} \\ \hline 1000 & \mathbf{3000} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- $m = 4,\ n = 6$
- warunek stopu nie jest spełniony
- znajdujemy indeks s: $\max\{y_{5,j}\ j = 1\ldots 6\}, \quad s = 2$
- problem jest ograniczony
- znajdujemy indeks r: $\min\{\frac{y_{j,7}}{y_{j,2}}\ j = 1\ldots 4\}$, $\min\{\frac{33000}{1}, \frac{13000}{1}, \frac{80000}{8}, \frac{7000}{1}\}, \quad r = 4$
- nowy wektor bazowy: $\boldsymbol{x}_B^1 = [x_3\ x_4\ x_5\ x_2]^T$

Przeliczamy tablicę sympleksową

$$\mathbf{Y}^1 = \left[\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 26000 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 6000 \\ \boxed{\mathbf{5}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{24000} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline \mathbf{1000} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3000 & -21000000 \end{array}\right]$$

- warunek stopu nie jest spełniony
- $s = 1, \quad r = 3$
- problem jest ograniczony
- $\boldsymbol{x}_B^2 = [x_3\ x_4\ x_1\ x_2]^T$

Przeliczamy tablicę sympleksową

$$\mathbf{Y}^2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 11600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1200 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & 4800 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-200} & \mathbf{-1400} & -25800000 \end{array}\right]$$

- spełniony warunek stopu: $y_{5,j} \leqslant 0$ dla $j = 1 \ldots 5$
- optymalny wektor bazowy: $\boldsymbol{x}_B^2 = [x_3 \; x_4 \; x_1 \; x_2]^T$
- rozwiązanie: $x_1 = 4800, \; x_2 = 7000$
- koszt: $z^*(x_1, x_2) = 1000 \cdot 4800 + 3000 \cdot 7000 = 25800000$

Po zmianie ceny wyrobu I do 4000 zł

$$\mathbf{Y}^0 = \left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{\mathbf{3}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{33000} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13000 \\ \mathbf{5} & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 80000 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline \mathbf{4000} & 3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- $s = 1$, $r = 1$
- $\boldsymbol{x}_B^0 = [x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T = [33000\ 13000\ 80000\ 7000]^T$
- $\boldsymbol{x}_B^1 = [x_1\ x_4\ x_5\ x_6]^T$

$$\mathbf{Y}^1 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \mathbf{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 11000 \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{\frac{2}{3}}} & -\mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2000} \\ 0 & \mathbf{\frac{19}{3}} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 25000 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline 0 & \mathbf{\frac{5000}{3}} & -\frac{4000}{3} & 0 & 0 & 0 & -44000000 \end{array}\right]$$

$s = 2$, $r = 2$, $\boldsymbol{x}_B^1 = [x_1\ x_4\ x_5\ x_6]^T$, $\boldsymbol{x}_B^2 = [x_1\ x_2\ x_5\ x_6]^T$

$$\mathbf{Y}^2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{6} & -\frac{19}{2} & 1 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline 0 & 0 & -\mathbf{500} & -\mathbf{2500} & 0 & 0 & -49000000 \end{array}\right]$$

$x_B^2 = [x_1\ x_2\ x_5\ x_6]^T$

$z^*(x_1, x_2) = 4000 \cdot 10000 + 3000 \cdot 3000 = 40000000 + 9000000 = 49000000$

Przykład 2.3.

Rozwiązać metodą sympleksową zadanie

$$\min[z = 2x_1 + x_2]$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 3$$

$$x_1 + 2x_1 \geqslant 4$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

Postać standardowa

$$\min[z = 2x_1 + x_2]$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_1 - x_4 = 4$$

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 4$$

- Nie jest to postać kanoniczna, więc należy zastosować metodę dwufazową
- Wprowadzamy wektor zmiennych sztucznych $\boldsymbol{x}_a = [x_5 \; x_6]^T$
- Rozwiązujemy zadanie pomocnicze

$$\min[w = 1^T x_a]$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0, \; \boldsymbol{x}_a \geqslant 0$$

$$\mathbf{Y}_1^0 = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & \mathbf{3} & -1 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Wektor zmiennych bazowych
$\boldsymbol{x}_B^0 = [x_5 \; x_6]^T = [3 \; 4]^T$

$$\mathbf{Y}_1^1 = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{1} & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \mathbf{1} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \hline \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Wektor zmiennych bazowych $\boldsymbol{x}_B^1 = [x_5 \; x_2]^T = [1 \; 2]^T$

$$\mathbf{Y}_1^2 = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Wektor zmiennych bazowych $\boldsymbol{x}_B^2 = [x_1 \; x_2]^T = [2 \; 1]^T$

Koniec fazy I – $w = 0$ i wśród zmiennych bazowych nie występują zmienne sztuczne. Początkowe rozwiązanie bazowe $\boldsymbol{x}^0 = [2\;1\;0\;0]^T$ odpowiada mu postać kanoniczna

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektor kosztów bazowych $\boldsymbol{c}_B^0 = [2\ 1]^T$; wektor $\boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}_0^T \cdot \boldsymbol{c}_B^0$

$$\boldsymbol{c}^0 = [2\,1\,0\,0] - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot [2\,1]^T = [0\,0\,3\ -1]$$

$$z_0^0 = \boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x}^0 = [2\ 1\ 0\ 0]^T \cdot [2\ 1\ 0\ 0] = 5$$

Przebieg Fazy II

$$\mathbf{Y}_2^0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{-1} & 1 \\ \hline 0 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^0 = [x_1\ x_2]^T = [2\ 1]^T$$

$$\mathbf{Y}_2^1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^1 = [x_4\ x_2]^T = [2\ 3]^T$$

Rozwiązanie optymalne: $\boldsymbol{x} = [0\ 3\ 0\ 2]^T$, wartość funkcji kosztu $z^*(\boldsymbol{x}) = 3$

Przykład 2.4.

Przedsiębiorstwo produkuje 2 wyroby w_1 i w_2. Dwa z wielu środków produkcji są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 36000, środek II - 50000. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produkcji zawiera poniższa tablica.

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	w_1	w_2
I	6	6
II	10	5

Zdolność produkcyjna jednego z agregatów nie pozwala wyprodukować więcej niż 4000 szt. wyrobu w_2. Nie ma natomiast żadnych dodatkowych ograniczeń w stosunku do wyrobu w_1. Ustalić optymalne rozmiary produkcji przy założeniu, że zysk realizowany na obu wyrobach jest jednakowy

- Funkcja celu

niech x_1 - wielkość produkcji wyrobu w_1, x_2 - wielkość produkcji wyrobu w_2

$$\max[z = x_1 + x_2]$$

- Ograniczenia

limit środków produkcji I	:	$6x_1 + 6x_2 \leqslant 36000$
limit środków produkcji II	:	$10x_1 + 5x_2 \leqslant 5000$
warunek brzegowy dla zmiennej x_1	:	$x_1 \geqslant 0$
warunek brzegowy dla zmiennej x_2	:	$4000 \geqslant x_2 \geqslant 0$

- Postać standardowa

$$\begin{array}{rcrcccl} 6x_1 & + & 6x_2 & +x_3 & & & = & 36000 \\ 10x_1 & + & 5x_2 & & +x_4 & & = & 50000 \\ & + & x_2 & & & +x_5 & = & 4000 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

Tablice sympleksowe mają postać:

$$\mathbf{Y}^0 = \left[\begin{array}{ccccc|r} \mathbf{6} & 6 & 1 & 0 & 0 & 36000 \\ \boxed{\mathbf{10}} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{50000} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 4000 \\ \hline \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^0 = [x_3\ x_4\ x_5]^T$$

$$\mathbf{Y}^1 = \left[\begin{array}{ccccc|r} \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{3}} & \mathbf{1} & -\mathbf{\frac{6}{10}} & \mathbf{0} & \mathbf{6000} \\ 1 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 5000 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 4000 \\ \hline 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -5000 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^1 = [x_3\ x_1\ x_5]^T$$

$$\mathbf{Y}^2 = \left[\begin{array}{ccccc|r} 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{10} & 0 & 2000 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{10} & 0 & 4000 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{10} & 1 & 2000 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \underline{\mathbf{0}} & 0 & -6000 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^2 = [x_2\ x_1\ x_5]^T$$

Rozwiązanie: $x_1 = 4000,\ x_2 = 2000, \quad z^* = 6000$

W pierwszym kroku metody sympleksowej można było wybrać również kolumnę drugą

$$\mathbf{Y}^0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & \mathbf{6} & 1 & 0 & 0 & 36000 \\ 10 & \mathbf{5} & 0 & 1 & 0 & 50000 \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4000} \\ \hline 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^0 = [x_3\ x_4\ x_5]^T$$

$$\mathbf{Y}^1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\mathbf{6}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{12000} \\ \mathbf{10} & 0 & 0 & 1 & -5 & 30000 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 4000 \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -4000 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^1 = [x_3\ x_4\ x_2]^T$$

$$\mathbf{Y}^2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -1 & 2000 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{6} & 1 & 5 & 10000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4000 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \underline{0} & -6000 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{x}_B^2 = [x_1\ x_4\ x_2]^T$$

Rozwiązanie: $x_1 = 2000,\ x_2 = 4000, \quad z^* = 6000$

☛ W obu przypadkach otrzymano tę samą wartość funkcji celu $z^* = 6000$ dla różnych wartości x_1^* i x_2^*:

1. I rozwiązanie: $x_1^* = 4000$ i $x_2^* = 2000$

2. II rozwiązanie: $x_1^* = 2000$ i $x_2^* = 4000$

☛ Jest to przypadek specjalny kiedy mamy do czynienia z nieskończoną liczbą rozwiązań

ANALIZA POOPTYMALIZACYJNA

- Zadaniem analizy pooptymalizacyjnej jest odpowiedź na pytania typu:
  1. czy wzrost jednego z zasobów produkcyjnych może zwiększyć zysk?
  2. jeżeli możliwy jest wzrost zysku to w jakim zakresie należy zwiększyć zasoby?
  3. po uzupełnieniu zasobów jakie będzie nowe rozwiązanie optymalne?
  4. czy niedobór jednego z zasobów może obniżyć zysk?
  5. jeśli tak to w jakim stopniu i jakie będzie nowe rozwiązanie optymalne?
- W celu odpowiedzi na te pytania należy przeprowadzić analizę ostatniej tabeli sympleksowej
- Odejmując ostatni wiersz tej tabeli od wektora kosztów c otrzymujemy wiersz s. Wartości tego wiersza określają wartości zasobów produkcyjnych.

  Jest to dodatkowy zysk, jaki jest możliwy do uzyskania przy zwiększaniu danych zasobów o jedną jednostkę

Rozpatrzmy przykład 2.2. Ostatnia tablica ma postać

$$
\begin{array}{l|cccccc|r|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 11600 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1200 \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & 1200 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\
\hline
\boldsymbol{c}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & -200 & -1400 & -25800000 \\
\boldsymbol{c} & 1000 & 3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_k & 1000 & 3000 & 0 & 0 & 200 & 1400 &
\end{array}
$$

W celu wyznaczenia zakresu zmienności zasobów:

1. dzielimy liczby w ostatniej kolumnie przez odpowiadające im liczby w kolumnie zmiennej pomocniczej rozważanego zasobu
2. wyznaczamy najmniejszy dodatni iloraz i największy ujemny
3. dodając otrzymane liczby do wielkości rozważanego zasobu otrzymujemy największy dopuszczalny wzrost i najmniejszy dopuszczalny spadek zasobu

						x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$	11600		$\frac{11600}{1} = 11600$	$\frac{11600}{0} = \infty$	$\frac{11600}{-0.6} = -19333.3$	$\frac{11600}{3.8} = 3052.6$
0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1200		$\frac{1200}{0} = \infty$	$\frac{1200}{1} = 1200$	$\frac{1200}{-0.2} = -6000$	$\frac{1200}{0.6} = 2000$
0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$	4800		$\frac{4800}{0} = \infty$	$\frac{4800}{0} = \infty$	$\frac{4800}{0.2} = 24000$	$\frac{4800}{1.6} = -3000$
0	0	0	1	7000		$\frac{7000}{0} = \infty$	$\frac{7000}{0} = \infty$	$\frac{7000}{0} = \infty$	$\frac{7000}{1} = 7000$
0	0	200	1400	$-25,8$ mln		wektor $\boldsymbol{s}$			
wartość wyjściowa						33000	13000	80000	7000
górny zakres						∞	∞	86000	10000
dolny zakres						21400	11800	56000	5000

Dodatkowy zysk: z 1h pracy O_1 wynosi 0 zł, z 1h pracy O_2 wynosi 0 zł, zysk z 1h pracy F wynosi 200 zł i zysk za 1 egzemplarz wyrobu II wynosi 1400 zł

Zakresy ważności tych zysków dla zasobów wynoszą odpowiednio:
21400 - ∞ (dla O_1), 11800 - ∞ (dla O_2), 56000 - 86000 (dla F) i 5000 - 10000 (dla wyr. II)

WYZNACZANIE NOWEGO ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO

Przykład 2.5.

Załóżmy że możliwa jest zmiana czasu pracy obrabiarki F o +5000h i +10000h.

- przypadek I – $80000 + 5000 = 85000 < 86000$
- przypadek II – $80000 + 10000 = 90000 > 86000$ – należy przeliczyć całe zadanie

Dla pierwszego przypadku otrzymujemy:

Baza	x_5	wartość	nowa wartość
x_3	$-\frac{3}{5}$	11600	$11600 + 5000 \cdot (-\frac{3}{5}) = 11600 - 3000 = 8600$
x_4	$-\frac{1}{5}$	1200	$1200 + 5000 \cdot (-\frac{1}{5}) = 1200 - 1000 = 200$
x_1	$\frac{1}{5}$	4800	$4800 + 5000 \cdot (\frac{1}{5}) = 4800 + 1000 = 5800$
x_2	0	7000	$7000 + 5000 \cdot 0 = 7000$
$\boldsymbol{s}$	200	$-25,8$mln	$-25,8$mln $- 5000 \cdot 200 = -25,8$mln $-$ 1mln $= -26,8$mln

Nowe wartości $x_1 = 5800,\ x_2 = 7000,\ z^* = -26,8$mln

Załóżmy, że z powodu starości należy zmniejszyć wykorzystanie frezarki o 10000h. Nowe rozwiązanie optymalne otrzymujemy następująco:

Baza	x_5	wartość	nowa wartość
x_3	$-\frac{3}{5}$	11600	$11600 - 10000 \cdot (-\frac{3}{5}) = 11600 + 6000 = 17600$
x_4	$-\frac{1}{5}$	1200	$1200 - 10000 \cdot (-\frac{1}{5}) = 1200 + 2000 = 3200$
x_1	$\frac{1}{5}$	4800	$4800 - 10000 \cdot (\frac{1}{5}) = 4800 - 2000 = 2800$
x_2	0	7000	$7000 - 10000 \cdot 0 = 7000$
$\boldsymbol{s}$	200	$-25,8$mln	$-25,8$mln $+ 10000 \cdot 200 = -25,8$mln $+ 2$mln $= -23,8$mln

Nowe wartości $x_1 = 2800,\ x_2 = 7000,\ z^* = -23,8$mln

WPŁYW ZMIAN CEN NA ZYSK

- Warto wiedzieć przy jakich wahaniach cen danej zmiennej decyzyjnej, rozwiązanie optymalne pozostaje bez zmian
- Dla zmiennej x_i która jest w bazie obowiązuje reguła:
  1. Dopuszczalny wzrost współczynnika c_i to najmniejszy dodatni iloraz wyrazu c_{kj} przez a_{ij}
  2. Dopuszczalny spadek współczynnika c_i to największy ujemny iloraz wyrazu c_{kj} przez a_{ij}

Przykład 2.6. Rozważmy końcową tablicę sympleksową w przykładu 2.2.

$$\mathbf{Y}^2 = \left[\begin{array}{cccccc|r} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 11600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & 1200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-200} & \mathbf{-1400} & -25800000 \end{array}\right]$$

➢ Po przeliczeniu otrzymujemy:

x_1	$\frac{0}{1} = 0$	–	–	–	$\frac{-200}{0.2} = -1000$	$\frac{-1400}{-1.6} = 875$
x_2	–	$\frac{0}{1} = 0$	–	–	–	$\frac{-1400}{1} = -1400$

➢ Zakres współczynnika c_1: od $1000 - 1000 = 0$ do $1000 + 875 = 1875$

➢ Zakres współczynnika c_2: od $3000 - 1400 = 1600$ do $3000 + \infty = \infty$

➢ Rozwiązanie problemu: $x_1 = 4800$, $x_2 = 7000$

➢ Wartość funkcji kosztu:

- wartości nominalne kosztu: $c_1 = 1000$, $c_2 = 3000$
- po zmianie na: $c_1 = 1500$, $c_2 = 3000$, $z^* = 1500 \cdot 4800 + 3000 \cdot 7000 = 28.2$mln
- po zmianie na $c_1 = 1000$, $c_2 = 1650$, $z^* = 1000 \cdot 4800 + 1650 \cdot 7000 = 16.35$mln

UWAGA!

> Rozwiązanie optymalne nie ulegnie zmianie tylko wtedy gdy ulegnie zmianie tylko jeden ! koszt