ZAGADNIENIA TRANSPORTOWE

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

WPROWADZENIE

- Zagadnienia transportowe opracowano w 1941 r. (F.L. Hitchcock)

- Jest to problem opracowania planu przewozu pewnego jednorodnego produktu z kilku różnych źródeł zaopatrzenia do kilku punktów zgłaszających zapotrzebowanie na ten towar

- Kryterium optymalizacji planu przewozów to najczęściej minimalizacja kosztów transportu, czasami minimalizacja odległości lub czasu transportu.

SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Znaleźć minimum

$$z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{(ograniczenia dostaw)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(ograniczenia zapotrzebowań)}$$

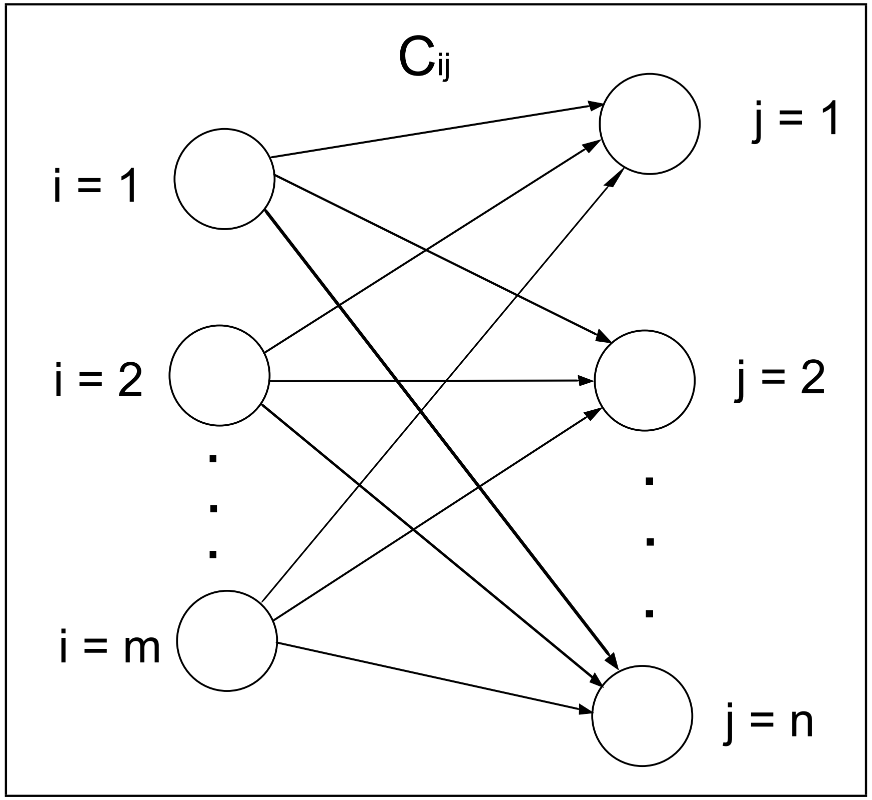
$$x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(warunki brzegowe)}$$

gdzie a_i, b_j, c_{ij} są nieujemne i całkowite
c_{ij} – oznaczają jednostkowe koszty transportu
a_i – wielkości dostaw
b_j – zapotrzebowanie odbiorców
x_{ij}– wielkości jednostkowe przewozu

Zagadnienie transportowe jest odmianą zagadnień programowania liniowego, zarówno funkcja celu jak i ograniczenia mają postać liniową

Interpretacja sieciowa

- Zagadnienie transportowe ma interpretację sieciową
- Załóżmy, że mamy sieć skierowaną (digraf ważony) określoną za pomocą wierzchołków V i zbioru skierowanych łuków E
- W zagadnieniu transportowym sieć jest dwudzielna i pełna:
  - ◇ wszystkie wierzchołki można podzielić na dwie grupy: na węzły dostawy $(i = 1, 2, \ldots, m)$ i węzły odbioru $(j = 1, 2, \ldots, n)$
  - ◇ każdy wierzchołek dostawy ma n łuków wychodzących z niego do wszystkich wierzchołków odbioru
- Dla każdego łuku jest określony jednostkowy koszt przewozu transportowanego dobra



Zagadnienie transportowe polega na wyznaczeniu takich wielkości przewozu x_{ij}, które minimalizują całkowity koszt transportu z. Pierwszych m nierówności odnosi się do wierzchołków dostawcy, następne n do wierzchołków odbiorcy

WŁAŚCIWOŚCI

- Zagadnienie transportowe ma rozwiązanie dopuszczalne, gdy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_i$$

- Ograniczenia odbioru stają się równościami dla rozwiązania optymalnego

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ TRANSPORTOWYCH

- Zagadnienia transportowe są szczególnym przypadkiem zagadnień programowania liniowego i mogą być rozwiązywane za pomocą metody sympleks
- Istnieją także inne metody, np. algorytm największego przepływu
- Dalej rozważany będzie algorytm transportowy, który podobnie jak metoda sympleks, jest procedurą iteracyjną
- W pierwszym kroku stosując jedną ze znanych metod, wyznacza się początkowe rozwiązanie dopuszczalne
- W następnych krokach poprawia się to początkowe rozwiązanie

Metody wyznaczania rozwiązania początkowego

1. Metoda kąta (rogu) północno-zachodniego

- zasada polega na kolejnym wypełnianiu macierzy przewozów x_{ij}
- zaczynamy od klatki w lewym górnym rogu – wpisujemy do niej mniejszą z liczb a_1,b_1 odpowiadających tej klatce
- następny krok polega na przesunięciu się w prawo lub w dół, zależnie od tego, czy i-temu dostawcy został do rozdysponowania towar (w prawo) czy całą podaż i-tego dostawcy rozdzielono odbiorcom (w dół)

Przykład 5.1.

Dwie hurtownie spożywcze H_1 i H_2 dostarczają cukier do czterech sklepów zlokalizowanych w różnych miejscowościach S_1, S_2, S_3 ,S_4. Jednostkowe koszty transportu c_{ij} (w tys. zł), oferowane wielkości dostaw a_i (w tonach) oraz zapotrzebowanie sklepów b_j (w tonach) podaje poniższa tablica:

c_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_j
H_1	50	20	20	60	800
H_2	10	50	80	70	800
b_j	100	300	500	700	1600

Opracować plan transportu cukru minimalizujący całkowite koszty transportu

- niech x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$) – ilość ton cukru jaka powinna być dostarczona z i-tej hurtowni do j-tego sklepu
- rozwiązanie dopuszczalne istnieje, bo

$$\sum_{i=1}^{2} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{4} b_j$$

- ograniczenia dla dostawców

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = \sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 800 \quad (H_1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 800 \quad (H_2)$$

- ograniczenia dla odbiorców

$$x_{11} + x_{21} = \sum_{i=1}^{2} x_{i1} = 100 \quad (S_1)$$

$$x_{12} + x_{22} = \sum_{i=1}^{2} x_{i2} = 300 \quad (S_2)$$

$$x_{13} + x_{23} = \sum_{i=1}^{2} x_{i3} = 500 \quad (S_3)$$

$$x_{14} + x_{24} = \sum_{i=1}^{2} x_{i4} = 700 \quad (S_4)$$

- warunki brzegowe

$$x_{ij} \geqslant 0 \, (i = 1, 2; j = 1, \ldots, 4)$$

- funkcja celu

$$z = 50x_{11} + 10x_{12} + 20x_{13} + 60x_{14} + 10x_{21} + 50x_{22} + 80x_{23} + 70x_{14} \rightarrow \ \min$$

Wypełniamy tabelę ilości przewozów

x_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	$^{(1)}100$	$^{(2)}300$	$^{(3)}400$		800
H_2			$^{(4)}100$	$^{(5)}700$	800
b_j	100	300	500	700	1600

(1) do klatki x_{11} wpisujemy $\min\{100, 800\} = 100$

(2) przesuwamy się w prawo, gdyż zapotrzebowanie odbiorcy (S_1) zostało zaspokojone, a dostawca H_1 ma jeszcze towar do rozdysponowania i do klatki x_{12} wpisujemy 300 (tyle potrzebuje S_2)

(3) przesuwamy się w prawo, gdyż zapotrzebowanie odbiorcy (S_2) zostało zaspokojone, a dostawca H_1 ma jeszcze towar i do klatki x_{13} wpisujemy 400 (tyle zostało H_1)

(4) przesuwamy się w dół, gdyż dostawca H_1 nie ma już towaru, a odbiorca S_3 nie został jeszcze zaspokojony i do klatki x_{23} wpisujemy 100 (tyle jeszcze potrzebuje S_3)

(5) przesuwamy się w prawo i do klatki x_{24} wpisujemy 700 – tyle potrzebuje odbiorca S_4

Otrzymaliśmy początkowe rozwiązanie dopuszczalne. Odpowiadające mu koszty wynoszą

$$z = 50 \cdot 100 + 20 \cdot 300 + 20 \cdot 400 + 80 \cdot 100 + 70 \cdot 700 = 76000 \quad \text{tys. zł.}$$

Powyższe rozwiązanie będzie poprawiane w kolejnych iteracjach algorytmu transportowego do momentu uzyskania rozwiązania optymalnego

Wady:

- metoda kąta północno-zachodniego abstrahuje od kosztów transportu, dlatego też algorytm transportowy wymaga zwykle większej liczby iteracji niż w przypadku zastosowania innych metod wyznaczania rozwiązania początkowego

2. Metoda minimalnego elementu macierzy

- metoda ta polega na rozmieszczeniu przewozów przede wszystkim na tych trasach, na których koszty są najniższe
- należy przekształcić macierz kosztów do takiej postaci, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie występowało co najmniej jedno zero
- transformacje dokonuje się odejmując od elementów poszczególnych wierszy macierzy kosztów najmniejszy element znajdujący się w danym wierszu
- następnie od poszczególnych kolumn odejmujemy element najmniejszy z danej kolumny
- otrzymujemy przekształconą macierz kosztów. Elementy zerowe w tej macierzy oznaczają trasy, na których koszty przewozu są najniższe
- rozdysponowanie zaczyna się od dowolnej klatki zerowej
- jeżeli uda się rozmieścić wszystkie przewozy wyłącznie na klatkach zerowych, to otrzymane rozwiązanie jest optymalnym planem przewozów

Przykład 5.2. Wyznaczamy początkowe rozwiązanie dopuszczalne z przykładu 5.1.

Odejmujemy najmniejsze elementy poszczególnych wierszy od pozostałych elementów, otrzymujemy

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	30	0	0	40	800
H_2	0	40	70	60	800
b_j	100	300	500	700	1600

Nie we wszystkich kolumnach występuje zero, więc odejmujemy od elementów kolumn ich najmniejsze elementy, otrzymujemy

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	30	0	0	0	800
H_2	0	40	70	20	800
b_j	100	300	500	700	1600

- rozpoczynamy rozdysponowanie środków od dowolnie wybranej klatki zerowej
- do klatki x_{21} można maksymalnie wpisać 100, bo tyle ma zapotrzebowania S_1

x_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1		300	500		800
H_2	100			700	800
b_j	100	300	500	700	1600

- kolejna wolna klatka to x_{12} i tam maksymalnie wpisujemy 300 (ze względu na S_2)
- następnie do klatki x_{13} wpisujemy 500 (biorąc pod uwagę S_3)
- ostatnia wolna klatka to x_{14}, ale do niej nie możemy wpisać przydziału, ponieważ towar dostawcy H_1 został już rozdysponowany
- jesteśmy zmuszeni przydzielić do S_4 towar od dostawcy H_2 w wysokości 700

- Koszty związane z tym rozwiązaniem początkowym są następujące:

$$z = 100 \cdot 10 + 300 \cdot 20 + 500 \cdot 20 + 700 \cdot 70 = 66000 \quad \text{tys. zł}$$

- Porównując to rozwiązanie z rozwiązaniem wygenerowanym metodą kąta północno-zachodniego okazuje się, że to uzyskane metodą minimalnego elementu macierzy jest rozwiązaniem lepszym (mniejszy koszt)

- Otrzymane rozwiązanie nie jest optymalne. Dlaczego?
  Nie udało się zaalokować przewozów wyłącznie w klatkach zerowych

WYZNACZANIE ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO

Metoda zmodyfikowanej dystrybucji

- należy wyznaczyć tzw. liczby indeksowe r_i dla rzędów i k_j dla kolumn tak, aby dla każdej obsadzonej komórki o współrzędnych i, j spełnione było równanie

$$r_i + k_j = c_{ij}$$

  gdzie c_{ij} oznacza koszt przypisany temu polu

- by znaleźć liczby r_i i k_j przyjmujemy $r_1 = 0$ i z powyższego równania obliczamy pozostałe liczby indeksowe

- dla każdej nieobsadzonej komórki wyznaczamy jej potencjał ze wzoru

$$e_{ij} = c_{ij} - r_i - k_j$$

Rozwiązanie jest optymalne jeśli wszystkie otrzymane potencjały e_{ij} są nieujemne. Jeśli dla któregoś z wolnych pól potencjał e_{ij} jest ujemny, rozwiązanie można poprawić

Przykład 5.3.

Rozważmy tabelkę z przykładu 5.1 zawierającą początkowe rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą kąta północno-zachodniego

c_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_j
H_1	50	20	20	60	800
H_2	10	50	80	70	800
b_j	100	300	500	700	1600

x_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	100	300	400	^{50}	800
H_2	$^{-100}$	$^{-30}$	100	700	800
b_j	100	300	500	700	1600

Liczby indeksowe

1. $r_1 = 0$,
2. $k_1 = c_{11} - r_1 = 50$
3. $k_2 = c_{12} - r_1 = 20$
4. $k_3 = c_{13} - r_1 = 20$
5. $r_2 = c_{23} - k_3 = 60$
6. $k_4 = c_{24} - r_2 = 10$

Potencjały komórek

1. $e_{21} = c_{21} - r_2 - k_1 = 10 - 60 - 50 = -100$
2. $e_{22} = c_{22} - r_2 - k_2 = 50 - 60 - 20 = -30$
3. $e_{14} = c_{12} - r_1 - k_4 = 60 - 0 - 10 = 50$

Postępowanie jest następujące

- wyznaczamy wolne pole o największym co do wartości bezwzględnej ujemnym potencjale
- konstruujemy ścieżkę dla tego pola metodą ”z kamienia na kamień”
- spośród pól na ścieżce, którym przypisaliśmy znak minus (-), wybieramy najmniejszą ulokowaną tam wartość
- o te wartości w zależności od znaku (+) czy (-) zwiększamy lub zmniejszamy alokacje pól na ścieżce

Metodа z kamienia na kamień

- ◇ w wybranym polu o ujemnym potencjale stawiamy znak (+), przypisujemy temu polu jedną jednostkę
- ◇ by zachować warunki musimy o jeden zmniejszyć już wykorzystane pole w tym samym rzędzie lub tej samej kolumnie. W polu tym stawiamy (-)
- ◇ kontynuujemy postępowanie stawiając na przemian znaki (+) i (-), aż ścieżka zamknie się w wyjściowym polu
- ◇ dokonujemy bilansu kosztów na stworzonej ścieżce. Jeżeli bilans kosztów jest ujemny, to można dokonać przealokowania środków w celu wygenerowania lepszego rozwiązania

$x_{ij}(c_{ij})$	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	$100(50)\ _{(-)}$	$300(20)$	$400(20)\ _{(+)}$	$(60)^{50}$	800
H_2	$(10)^{-100} \bullet_{(+)}$	$(50)^{\ -30}$	$100(80)\ _{(-)}$	$700(70)$	800
b_j	100	300	500	700	1600

1. wybieramy pole z potencjałem e_{21}, wstawiamy tam znak $(+)$
2. tworzymy ścieżkę wstawiając na przemian znaki $(+)$ i (-)
3. dokonujemy bilansu na ścieżce

$$bilans = c_{21} - c_{11} + c_{13} - c_{23} = 10 - 50 + 20 - 80 = -100 < 0$$

można poprawić rozwiązanie, gdyż bilans jest mniejszy od zera!
Koszty przewozu można zmniejszyć na tej ścieżce o 100 jednostek

4. przenosimy zasoby

c_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_j
H_1	50	20	20	60	800
H_2	10	50	80	70	800
b_j	100	300	500	700	1600

x_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1		300	500		800
H_2	100			700	800
b_j	100	300	500	700	1600

Uwaga! Takie rozplanowanie przewozów uzyskano wcześniej metodą minimalnego elementu macierzy!

5. przeprowadzamy test na optymalność

   - liczby indeksowe

$$r_1 = 0, k_2 = 20, k_3 = 20, r_2 = 0, k_1 = 10, k_4 = 70$$

   - potencjały

$$e_{11} = 40, e_{22} = 30, e_{23} = 60, e_{14} = -10$$

6. wybieramy pole z potencjałem e_{14}, stawiamy tam znak $(+)$

7. tworzymy ścieżkę dla tego pola

$x_{ij}(c_{ij})$	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	$(50)^{40}$	$300(20)$	$500(20)_{(-)}$	$(60)\ ^{-10}\bullet_{(+)}$	800
H_2	$100(10)$	$(50)^{30}$	$(80)^{60}{}_{(+)}$	$700(70)^{(-)}$	800
b_j	100	300	500	700	1600

8. liczymy bilans dla tej ścieżki

$$bilans = c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24} = 60 - 20 + 80 - 70 = 50 > 0$$

przerzucenie środków spowoduje wzrost kosztów

9. alternatywna ścieżka

$x_{ij}(c_{ij})$	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	$(50)^{40}$	$300(20)_{(-)}$	$500(20)$	$(60)\ ^{-10}\bullet_{(+)}$	800
H_2	$100(10)$	$(50)^{30}{}_{(+)}$	$(80)^{60}$	$700(70)^{(-)}$	800
b_j	100	300	500	700	1600

10. bilans na ścieżce

$$bilans = c_{14} - c_{12} + c_{22} - c_{24} = 60 - 20 + 50 - 70 = 20 > 0$$

przerzucenie środków także spowoduje wzrost kosztów

11. wniosek: nie można polepszyć rozwiązania
końcowe rozwiązanie:

$$z^* = 1000 + 6000 + 10000 + 49000 = 66000$$

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

1) Niejednoznaczność

- Jeżeli wśród potencjałów wolnych pól rozwiązania optymalnego pojawi się zero, to rozwiązanie optymalne nie jest jednoznaczne
- Alternatywne rozwiązanie może być wyprowadzone poprzez wprowadzenie do aktualnego rozwiązania pola z potencjałem zero

Przykład 5.4

c_{ij}	U	V	W	Dostawy
A	4	2	8	100
B	5	1	9	200
C	7	6	3	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

$x_{ij}(c_{ij})$	U	V	W	Dostawy
A	$50(4)_{(-)}$	$(2)^2$	$50(8)_{(+)}$	100
B	$(5)^0 \bullet_{(+)}$	$150(1)$	$50(9)_{(-)}$	200
C	$(7)^8$	$(6)^{11}$	$200(3)$	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

otrzymujemy

$x_{ij}(c_{ij})$	U	V	W	Dostawy
A	(4)	(2)	$100(8)$	100
B	$50(5)$	$150(1)$	(9)	200
C	(7)	(6)	$200(3)$	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

koszt przed przemieszczeniem zasobów: $z = 50 \cdot 4 + 50 \cdot 8 + 150 \cdot 1 + 50 \cdot 9 + 200 \cdot 3 = 1800$

koszt po przemieszczeniu zasobów: $z = 100 \cdot 8 + 50 \cdot 5 + 150 \cdot 1 + 200 \cdot 3 = 1800$

2) Rozwiązanie zdegenerowane

- Rozwiązanie jest zdegenerowane, jeżeli ilość zaalokowanych pól jest mniejsza niż suma ilości rzędów i kolumn zmniejszona o 1
- Rozwiązanie alternatywne z przykładu 5.4 jest zdegenerowane, gdyż liczba pól $= 4$, a suma wierszy i kolumn $= 6$, $4 \neq 6 - 1$
- W takich przypadkach pojawiają się problemy z wyznaczeniem pewnych ścieżek oraz z wyznaczeniem liczb indeksowych
- Aby ominąć ten problem w wybranym wolnym polu alokujemy bardzo małą wielkość symbolicznie oznaczoną przez Δ, którą przy obliczaniu traktujemy jak zero

Przykład 5.5. Dla rozwiązania alternatywnego z przykładu 5.4 otrzymujemy

x_{ij}	U	V	W	Dostawy
A			100	100
B	50	150		200
C			200	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

$x_{ij}(c_{ij})$	U	V	W	Dostawy
A	(4)	(2)	100(8)	100
B	50(5)	150(1)	(9)	200
C	(7)	(6)	200(3)	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

$r_1 = 0$, $k_3 = 8$, $r_3 = -5$, ale $r_2 = ?$, $k_1 = ?$, $k_2 = ?$

Wpisujemy Δ w dowolnie wybrane pole

x_{ij}	U	V	W	Dostawy
A		Δ	100	100
B	50	150		200
C			200	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

teraz można wyznaczyć wszystkie liczby indeksowe i potencjały wolnych pól

3) Niedopuszczalne drogi

- Przypuśćmy, że w jakimś problemie transportowym z powodu kataklizmu, np. powodzi czy trzęsienia ziemi, zablokowana jest możliwość dostarczenia towaru od dostawcy A do odbiorcy X
- Postępowanie: Połączeniu między A i X nadajemy bardzo wysoki koszt, np 10 razy wyższy od najwyższego kosztu na wszystkich połączeniach

c_{ij}	U	V	W	Dostawy
A	4	2	100	100
B	5	1	9	200
C	7	6	3	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

$x_{ij}(c_{ij})$	U	V	W	Dostawy
A	$50(4)$	$50(2)$	$(100)\ ^{+90}$	100
B	$(5)^{+2}$	$100(1)$	$100(9)$	200
C	$(7)\ ^{+10}$	$(6)\ ^{+11}$	$200(3)$	200
Zapotrzebowanie	50	150	300	500

- Takie postępowanie powoduje wygenerowanie bardzo dużego dodatniego potencjału na takiej drodze
- W efekcie przez to pole nie prowadzi się prealokacji zasobów

4) Niezrównoważona podaż z popytem

- Do tej pory rozważaliśmy zagadnienia transportowe zamknięte, tzn. zagadnienia, w których podaż zrównoważyła się z popytem.W zagadnieniach takich

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Problem: Jak postępować w przypadkach, kiedy podaż nie równoważy popytu?
- W takich przypadkach mamy do czynienia z problemami transportowymi otwartymi
- Aby rozważać takie problemy, należy zagadnienie otwarte sprowadzić do zagadnienia zamkniętego poprzez wprowadzenie fikcyjnego odbiorcy albo fikcyjnego dostawcy
  1. Problem, w którym podaż przewyższa popyt rozwiązujemy wprowadzając fikcyjnego odbiorcę
  2. Problem, w którym popyt przewyższa podaż rozwiązujemy wprowadzając fikcyjnego dostawcę

Przykład 5.6.

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
H_1	50	20	20	60	1500
H_2	10	50	80	70	800
b_j	100	300	500	700	

$\sum a_i = 2300$, $\sum b_j = 1600$, podaż $>$ popyt

- Wprowadzamy fikcyjnego piątego odbiorcę, aby zbilansować podaż z popytem
- Piątego odbiorcę oznaczamy jako M. Jego zapotrzebowanie będzie wynosiło różnicę pomiędzy podażą, a popytem (700)
- W praktyce nadwyżka ta pozostaje w magazynach poszczególnych dostawców
- Jeżeli przyjmiemy, że koszt magazynowania 1 tony cukru w $H_1 = 3$ tys. zł., a w H_2 – 2 tys. zł., to tablica przyjmie postać

c_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	M	a_i
H_1	50	20	20	60	3	1500
H_2	10	50	80	70	2	800
b_j	100	300	500	700	700	2300

Rozwiązanie początkowe (metoda minimalnego elementu macierzy)

	S_1	S_2	S_3	S_4	M	a_i
H_1	39	0	0	0	0	1500
H_2	0	31	61	11	0	800
b_j	100	300	500	700	700	2300

Lokujemy zasoby

x_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	M	a_i
H_1		300	500	700		1500
H_2	100				700	800
b_j	100	300	500	700	700	2300

- Ulokowaliśmy wszystkie zasoby w klatkach z zerami, a więc otrzymane rozwiązanie jest optymalne
- Całkowite koszty przewozu + koszty magazynowania wynoszą

$$z = 100 * 10 + 300 * 20 + 500 * 20 + 700 * 60 + 700 * 2 = 60400$$

UWAGA!

W przypadku, kiedy wprowadzamy fikcyjnego dostawcę, interpretacją takiego postępowania jest czekanie odbiorcy na towar. To czekanie okupione musi być niestety kosztami. Dlatego trzeba zdefiniować koszt czekania na towar każdego odbiorcy