

PROGRAMOWANIE SIECIOWE. METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania operacyjne

Programowanie sieciowe. Metoda CPM

WPROWADZENIE

- Metody programowania sieciowego wprowadzono pod koniec lat pięćdziesiątych
- Ze względu na strukturę logiczną metody sieciowe dzieli się na:
 1. sieci o strukturze zdeterminowanej DAN (ang. *Deterministic Analysis Network*)
 2. sieci o strukturze stochastycznej GAN (ang. *Generalized Analysis Network*)
- Przy tak zdefiniowanym podziale będziemy rozważać modele sieciowe przedsięwzięć

Definicje

- **Przedsięwzięcie** – zorganizowane działanie ludzkie zmierzające do osiągnięcia określonego celu, zawarte w skończonym przedziale czasu, z wyróżnionym początkiem i końcem oraz zrealizowane przez skończoną liczbę osób, środków technicznych, energii, materiałów, środków finansowych i informacji
- Podstawowych elementów przedsięwzięcia: zdarzenia i czynności
- **Zdarzenie** – w modelu sieciowym oznacza osiągnięcie stanu zaawansowania prac przy realizacji przedsięwzięcia
- Zdarzenia przedstawia się graficznie za pomocą kółek lub innych figur geometrycznych
- **Czynność** – dowolnie wyodrębniona część przedsięwzięcia charakteryzująca się trwaniem, terminem rozpoczęcia, zakończenia oraz ilością zaangażowanych do jej wykonania środków
- Obrazem graficznym czynności są strzałki. Kierunek strzałki wskazuje kierunek przebiegu czynności w czasie

- Zależności pomiędzy zdarzeniami i czynnościami określają strukturę logiczną modelu sieciowego
- Struktura sieciowa może być:
 - ◇ zdeterminowana, jeśli w trakcie realizacji przedsięwzięcia wszystkie czynności przedstawione w sieci są zrealizowane
 - ◇ stochastyczna, jeśli w trakcie realizacji przedsięwzięcia bierze udział tylko część czynności przedstawiona w sieci, z określonym, większym od zera prawdopodobieństwem
- Modele sieciowe o zdeterminowanej strukturze logicznej:
 - ◇ CPM (ang. *Critical Path Method*)
 - ◇ CPM-COST
 - ◇ PERT (ang. *Program Evaluation and Review Technique*)
 - ◇ PERT-COST

Optymalizacja przedsięwzięcia polega na:

- wyodrębnieniu i zestawieniu wchodzących w jego skład czynności
- ocenie parametrów poszczególnych czynności i zdarzeń
- konstrukcji sieci zależności technologicznych
- wyznaczeniu podstawowych charakterystyk sieci dotyczących poszczególnych czynności, zdarzeń i całego projektu
- wyznaczeniu ścieżki krytycznej

Reguły obowiązujące przy konstrukcji sieci:

- należy tak rozplanować czynności przedsięwzięcia, aby graf nie zawierał pętli, ścieżek cyklicznych, itp.
- zaleca się, aby nie występowały skrzyżowania łuków (przejrzystość)
- powinien istnieć dokładnie jeden wierzchołek początkowy i jeden końcowy
- wierzchołki i łuki powinny być odpowiednio uporządkowane
- każda czynność może być zrealizowana tylko raz z prawdopodobieństwem równym jeden podczas wykonywania przedsięwzięcia

METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ – CPM

- Można przedstawić przedsięwzięcia w postaci spójnego, acyklicznego digrafu $G = (S, E)$, $E \subset S \times S$ takiego, że istnieje jeden wierzchołek $S_i^+ = 0$ (tzn. liczba łuków wychodzących = 0) i jeden wierzchołek $S_i^- = 0$ (tzn. liczba łuków wchodzących = 0). W grafie takim wierzchołki oznaczają zdarzenia, zaś łuki – czynności
- Graf taki modeluje listę czynności uwzględniając ograniczenia technologiczne i następstwo czasowe
- Zdarzenia powinny być tak uporządkowane, aby przyporządkowane im numery określały następstwo zdarzeń w czasie
- Należy ponumerować wierzchołki sieci zgodnie z warunkiem

jeżeli $(i, j) \in E$, to $i < j$

Algorytm przenumerowania wierzchołków grafu

- Krok 1. Dla danej sieci wyznacz odpowiadającą jej macierz binarną
- Krok 2. Do warstwy w_0 zalicz te zdarzenia, które odpowiadają zerowym kolumnom macierzy **B**
- Krok 3. Z macierzy **B** wykreśl zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach co wykreślone kolumny
- Krok 4. Do warstwy kolejnej zalicz wierzchołki odpowiadające zerowym kolumnom zredukowanej macierzy **B**
- Krok 5. Powtórz czynności 3 i 4

Przykład 6.1. Dana jest macierz **B**. Narysować graf oraz przenumerać wierzchołki

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

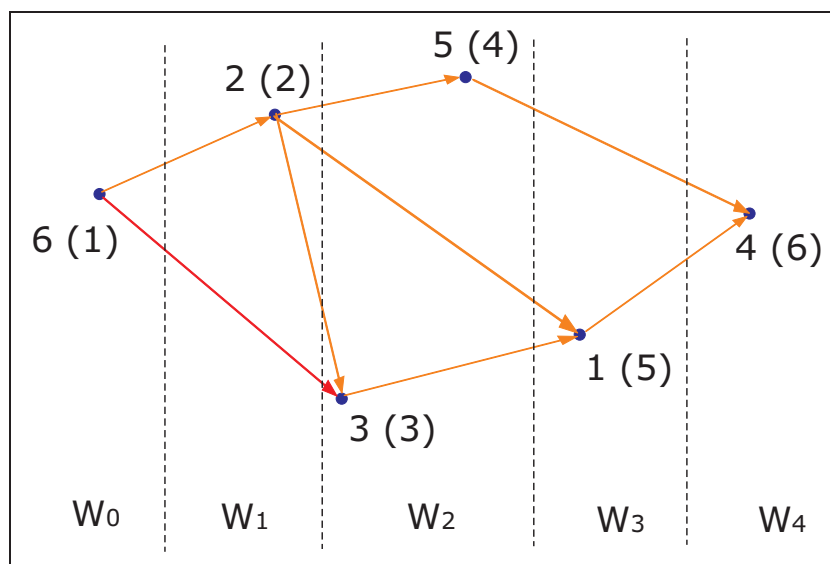
$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

1. Wykreślamy 6 kolumnę i 6 wiersz (warstwa w_0)
2. Wykreślamy 2 kolumnę i 2 wiersz (warstwa w_1)
3. Wykreślamy 3 i 5 kolumnę, 3 i 5 wiersz (warstwa w_2)
4. Wykreślamy 1 kolumnę i 1 wiersz (warstwa w_3)
5. Pozostaje 4 kolumna (warstwa w_4)

Wynikowy graf z nową numeracją wierzchołków



ZAŁOŻENIA METODY CPM

- łukom sieci przyporządkowane są liczby rzeczywiste określające czas realizacji poszczególnych czynności $(i, j) - t_{ij}$
- węzły sieci (zdarzenia) opisane są przez:
 - ◊ $T_i(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
 - ◊ $T_i(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- zdarzenia sieci są uporządkowane zgodnie z ich następstwem w czasie i ponumerowane liczbami $1, 2, \dots, n$

Określenie terminów

- Terminy najwcześniejsze
 - ◊ dla zdarzenia początkowego $T_1(w) = 0$
 - ◊ dla pozostałych:

$$T_i(w) = \max\{T_i(w) \neq t_{ij}\}; \quad i \in P(j), \quad j \in \{2, \dots, n\}$$

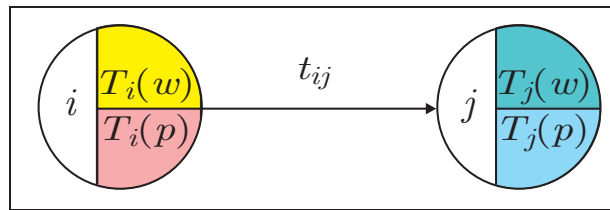
gdzie $P(j)$ - zbiór poprzedników zdarzenia j , $P(j) = \{i : (i, j) \in E\}$

- Terminy najpóźniejsze
 - ◊ $T_n(p) = T_n(w)$ – dla wierzchołka końcowego
 - ◊ dla pozostałych

$$T_i(p) = \min\{T_j(p) - t_{ij}\}; \quad j \in n(i), \quad i \in \{n-1, \dots, 1\}$$

gdzie $n(i)$ - zbiór następników zdarzenia i

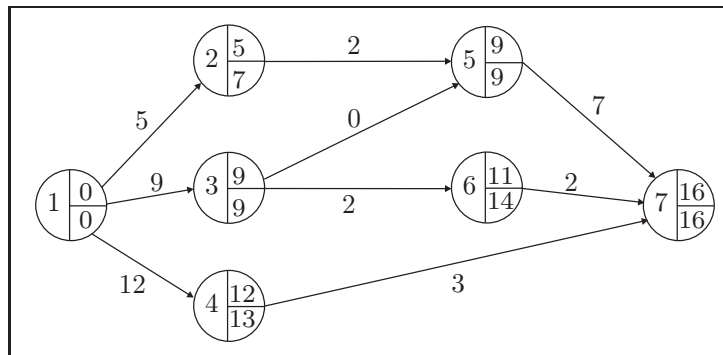
Interpretacja sieciowa terminów



gdzie

- $T_i(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- $T_i(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- $T_j(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia j
- $T_j(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia j
- t_{ij} – czas realizacji czynności (i, j)

Przykład 6.2. Określić terminy najwcześniejsze i najpóźniejsze w następującej sieci czynności



1. $T_1(w) = 0$
2. $T_2(w) = 5 + 0$
3. $T_3(w) = 9 + 0$
4. $T_4(w) = 12 + 0$
5. $T_5(w) = \max\{5 + 2, 9 + 0\} = 9$
6. $T_6(w) = 9 + 2 = 11$
7. $T_7(w) = \max\{9 + 7, 11 + 2, 12 + 3\} = 16$
8. $T_7(p) = 16$
9. $T_6(p) = 16 - 2 = 14$
10. $T_5(p) = 16 - 7 = 9$
11. $T_4(p) = 16 - 3 = 13$
12. $T_3(p) = \min\{14 - 2, 9 - 0\} = 9$
13. $T_2(p) = 9 - 2 = 7$
14. $T_1(p) = \min\{7 - 5, 9 - 9, 13 - 12\} = 0$

Luz zdarzenia

- Luz zdarzenia i

$$L_i = T_i(p) - T_i(w)$$

- Luz krytyczny

$$L_i = 0$$

- Zdarzenie krytyczne – zdarzenie, dla którego luz jest równy zero
- Ścieżka (droga) krytyczna $(i_0, i_1), (i_1, i_2) \dots (i_{p-1}, i_p)$ łączy zdarzenie początkowe $i_0 = 1$ ze zdarzeniem końcowym $i_p = n$, dla której czas

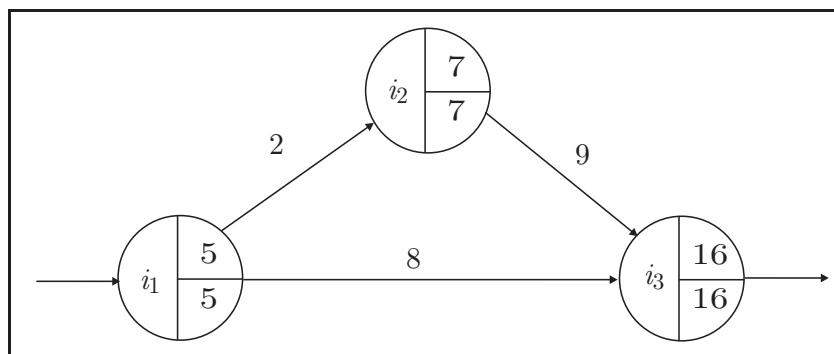
$$\tau = \sum_{k=1}^p t_{i_{k-1} i_k}$$

jest najdłuższy

UWAGI

- czas $\tau = T_n(w) = T_n(p)$ – najkrótszy cykl realizacji przedsięwzięcia
- czynności krytyczne – czynności leżące na ścieżce krytycznej
- ciąg zdarzeń krytycznych nie wyznacza w sposób jednoznaczny ścieżki krytycznej

Przykład 6.3.



WYZNACZANIE ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ

- Definiujemy zapas całkowity czasu czynności (i, j)

$$z_{ij}(c) = T_j(p) - T_i(w) - t_{ij}$$

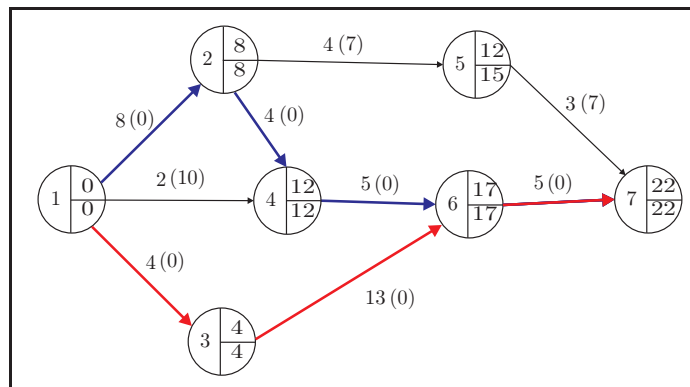
- Zapas całkowity jest rezerwą czasu, którą dana czynność dysponuje wspólnie z innymi czynnościami leżącymi na tym ciągu niekrytycznym

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby czynność (i, j) była czynnością krytyczną jest równość

$$z_{ij}(c) = 0$$

Przykład 6.4. Rozważmy poniższą sieć czynności. Wyznaczyć ścieżkę krytyczną



Obliczamy zapasy

1. $z_{12} = T_2(p) - T_1(w) - t_{12} = 0$
2. $z_{13} = 7 - 0 - 4 = 3$
3. $z_{14} = 12 - 0 - 2 = 10$
4. $z_{24} = 12 - 8 - 4 = 0$
5. $z_{25} = 19 - 8 - 4 = 7$
6. $z_{46} = 17 - 12 - 5 = 0$
7. $z_{36} = 17 - 4 - 10 = 3$
8. $z_{67} = 22 - 17 - 5 = 0$
9. $z_{57} = 22 - 12 - 3 = 7$

UWAGI!

1. Jeżeli czasy czynności krytycznych nie ulegną wydłużeniu, to całe przedsięwzięcie zostanie zrealizowane w najkrótszym możliwym terminie $T_n(w) = T_n(p)$
2. Zapas swobodny czynności (i, j) : $z_{ij}(s) = T_j(w) - T_i(w) - t_{ij}$ określa, o ile jednostek czasu może spóźnić się rozpoczęcie czynności (i, j) , bez naruszenia terminu najwcześniejszego zdarzenia j (bez naruszenia $T_j(w)$)
3. Zapas niezależny czynności (i, j) : $z_{ij}(n) = T_j(w) - T_i(p) - t_{ij}$ wyraża dopuszczalne opóźnienie czynności (i, j) w przypadku, gdy zdarzenie i zaistniałoby w terminie najpóźniejszym, a zdarzenie j powinno rozpocząć się w terminie najwcześniejszym
4. Pomiędzy typami zapasów zachodzi zależność

$$\begin{array}{ccccc} \text{niezależny} & & \text{swobodny} & & \text{całkowity} \\ z_{ij}(n) & \leq & z_{ij}(s) & \leq & z_{ij}(c) \end{array}$$

5. Dla czynności krytycznych wszystkie rodzaje zapasów są równe zero

HARMONOGRAM REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘCIA

- Na podstawie modelu sieciowego przedsięwzięcia i obliczonych wartościach można zobrazować przedsięwzięcie w postaci diagramu
- Niech
 - $P_{ij}(w)$ - najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności (i, j)
 - $P_{ij}(p)$ - najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności (i, j)
 - $K_{ij}(w)$ - najwcześniejszy termin zakończenia czynności (i, j)
 - $K_{ij}(p)$ - najpóźniejszy dopuszczalny termin zakończenia czynności (i, j)

gdzie:

$$P_{ij}(w) = T_i(w)$$

$$P_{ij}(p) = T_j(p) - t_{ij}$$

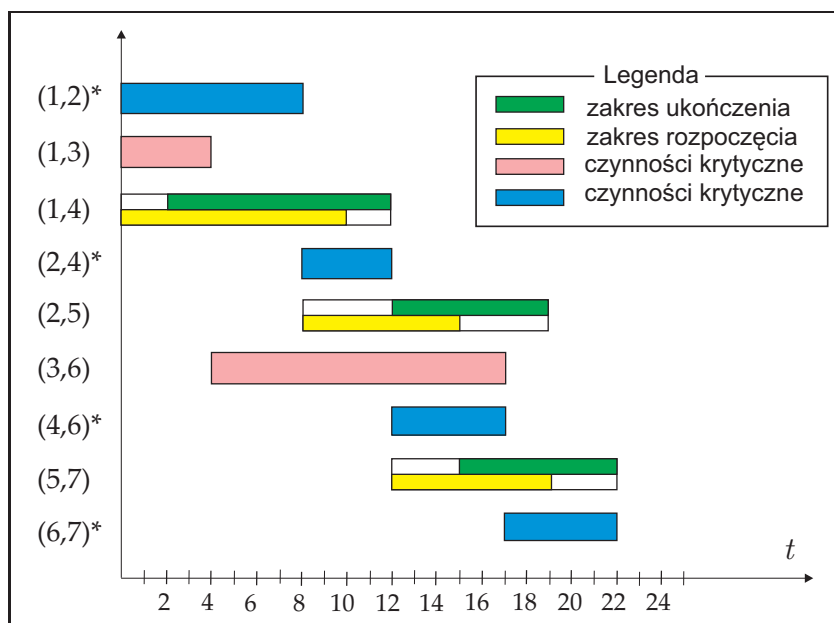
$$K_{ij}(w) = T_i(w) + t_{ij}$$

$$K_{ij}(p) = T_j(p)$$

Tablica harmonogramu realizacji przedsięwzięcia

(i, j)	t_{ij}	$P_{ij}(w)$	$P_{ij}(p)$	$K_{ij}(w)$	$K_{ij}(p)$	$Z_{ij}(c)$	$Z_{ij}(s)$	$Z_{ij}(n)$
$(1, 2)^*$	8	0	0	8	8	0	0	0
$(1, 3)$	4	0	3	4	7	3	0	0
$(1, 4)$	2	0	10	2	12	10	10	10
$(2, 4)^*$	4	8	8	12	12	0	0	0
$(2, 5)$	4	8	15	12	19	7	0	0
$(3, 6)$	10	4	7	14	17	3	3	0
$(4, 6)^*$	5	12	12	17	17	0	0	0
$(5, 7)$	3	12	19	15	22	7	7	0
$(6, 7)^*$	5	17	17	22	22	0	0	0

Diagram realizacji przedsięwzięcia



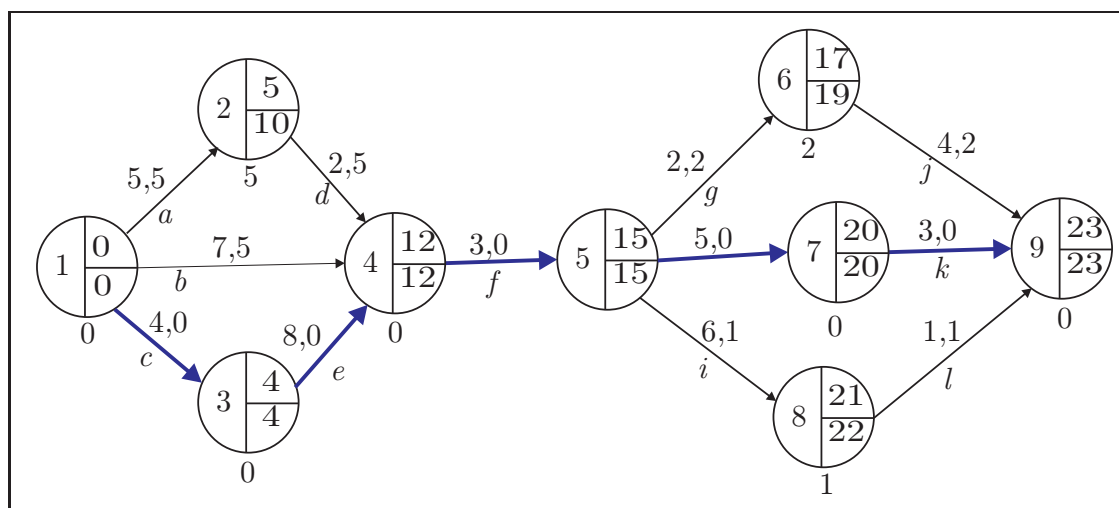
Przykład 6.5. Mając dane zawarte w tabeli narysować wykres sieciowy oraz diagram realizacji przedsięwzięcia, obliczyć najkrótszy czas realizacji oraz wyznaczyć ścieżkę krytyczną

Czas trwania czynności t_{ij}	Oznaczenie czynności	Poprzedniki
5	a	-
7	b	-
4	c	-
2	d	a
8	e	c
3	f	b, d, e
2	g	f
5	h	f
6	i	f
4	j	g
3	k	h
1	l	i

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

22

Sieć czynności



Minimalny czas wykonania czynności: 23h

Ścieżka krytyczna: $c - e - f - h - k$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

23

Harmonogram wykonania czynności

czynność	t_{ij}	$P_{ij}(w)$	$P_{ij}(p)$	$K_{ij}(w)$	$K_{ij}(p)$	$z_{ij}(c)$
a	5	0	5	5	10	5
b	7	0	5	7	12	5
c^*	4	0	0	4	4	0
d	2	5	10	7	12	5
e^*	8	4	4	12	12	0
f^*	3	12	12	15	15	0
g	2	15	17	17	19	2
h^*	5	15	15	20	20	0
i	6	15	16	21	22	1
j	4	17	19	21	23	2
k^*	3	20	20	23	23	0
l	1	21	22	22	23	1

