

PROGRAMOWANIE SIECIOWE. METODY CPM i PERT

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania operacyjne
Programowanie sieciowe.

1

WPROWADZENIE

- Metody programowania sieciowego wprowadzono pod koniec lat pięćdziesiątych
- Ze względu na strukturę logiczną metody sieciowe dzieli się na:
 1. sieci o strukturze zdeterminowanej DAN (ang. *Deterministic Analysis Network*)
 2. sieci o strukturze stochastycznej GAN (ang. *Generalized Analysis Network*)
- Przy tak zdefiniowanym podziale będziemy rozważać modele sieciowe przedsięwzięć

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Definicje

- **Przedsięwzięcie** – zorganizowane działanie ludzkie zmierzające do osiągnięcia określonego celu, zawarte w skończonym przedziale czasu, z wyróżnionym początkiem i końcem oraz zrealizowane przez skończoną liczbę osób, środków technicznych, energii, materiałów, środków finansowych i informacji
- Podstawowych elementów przedsięwzięcia: zdarzenia i czynności
- **Zdarzenie** – w modelu sieciowym oznacza osiągnięcie stanu zaawansowania prac przy realizacji przedsięwzięcia
- Zdarzenia przedstawia się graficznie za pomocą kółek lub innych figur geometrycznych
- **Czynność** – dowolnie wyodrębniona część przedsięwzięcia charakteryzująca się trwaniem, terminem rozpoczęcia, zakończenia oraz ilością zaangażowanych do jej wykonania środków
- Obrazem graficznym czynności są strzałki. Kierunek strzałki wskazuje kierunek przebiegu czynności w czasie

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

- Zależności pomiędzy zdarzeniami i czynnościami określają strukturę logiczną modelu sieciowego
- Struktura sieciowa może być:
 - ◇ **zdeterminowana**, jeśli w trakcie realizacji przedsięwzięcia wszystkie czynności przedstawione w sieci są zrealizowane
 - ◇ **stochastyczna**, jeśli w trakcie realizacji przedsięwzięcia bierze udział tylko część czynności przedstawiona w sieci, z określonym, większym od zera prawdopodobieństwem
- Modele sieciowe o zdeterminowanej strukturze logicznej:
 - ◇ CPM (ang. *Critical Path Method*)
 - ◇ CPM-COST
 - ◇ PERT (ang. *Program Evaluation and Review Technique*)
 - ◇ PERT-COST

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Optymalizacja przedsięwzięcia polega na:

- wyodrębnieniu i zestawieniu wchodzących w jego skład czynności
- ocenie parametrów poszczególnych czynności i zdarzeń
- konstrukcji sieci zależności technologicznych
- wyznaczeniu podstawowych charakterystyk sieci dotyczących poszczególnych czynności, zdarzeń i całego projektu
- wyznaczeniu ścieżki krytycznej

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Reguły obowiązujące przy konstrukcji sieci:

- należy tak rozplanować czynności przedsięwzięcia, aby graf nie zawierał pętli, ścieżek cyklicznych, itp.
- zaleca się, aby nie występowały skrzyżowania łuków (przejrzystość)
- powinien istnieć dokładnie jeden wierzchołek początkowy i jeden końcowy
- wierzchołki i łuki powinny być odpowiednio uporządkowane
- każda czynność może być zrealizowana tylko raz z prawdopodobieństwem równym jeden podczas wykonywania przedsięwzięcia

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

METODA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ – CPM

- Można przedstawić przedsięwzięcia w postaci spójnego, acyklicznego digrafu $G = (S, E)$, $E \subset S \times S$ takiego, że istnieje jeden wierzchołek $S_i^+ = 0$ (tzn. liczba łuków wychodzących = 0) i jeden wierzchołek $S_i^- = 0$ (tzn. liczba łuków wchodzących = 0). W grafie takim wierzchołki oznaczają zdarzenia, zaś łuki – czynności
- Graf taki modeluje listę czynności uwzględniając ograniczenia technologiczne i następstwo czasowe
- Zdarzenia powinny być tak uporządkowane, aby przyporządkowane im numery określały następstwo zdarzeń w czasie
- Należy ponumerować wierzchołki sieci zgodnie z warunkiem

$$\text{jeżeli } (i, j) \in E, \text{ to } i < j$$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Algorytm przenumerowania wierzchołków grafu

- Krok 1. Dla danej sieci wyznacz odpowiadającą jej macierz binarną
- Krok 2. Do warstwy w_0 zalicz te zdarzenia, które odpowiadają zerowym kolumnom macierzy **B**
- Krok 3. Z macierzy **B** wykreśl zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach co wykreślone kolumny
- Krok 4. Do warstwy kolejnej zalicz wierzchołki odpowiadające zerowym kolumnom zredukowanej macierzy **B**
- Krok 5. Powtórz czynności 3 i 4

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Przykład 6.1. Dana jest macierz B . Narysować graf oraz przenumerać wierzchołki

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

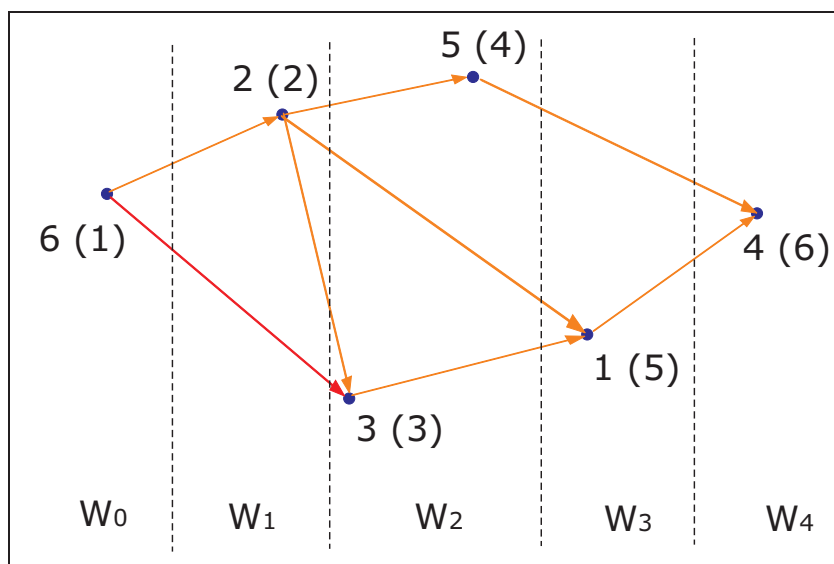
$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

1. Wykreślamy 6 kolumnę i 6 wiersz (warstwa w_0)
2. Wykreślamy 2 kolumnę i 2 wiersz (warstwa w_1)
3. Wykreślamy 3 i 5 kolumnę, 3 i 5 wiersz (warstwa w_2)
4. Wykreślamy 1 kolumnę i 1 wiersz (warstwa w_3)
5. Pozostaje 4 kolumna (warstwa w_4)

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wynikowy graf z nową numeracją wierzchołków



Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

ZAŁOŻENIA METODY CPM

- łukom sieci przyporządkowane są liczby rzeczywiste określające czas realizacji poszczególnych czynności $(i, j) - t_{ij}$
- węzły sieci (zdarzenia) opisane są przez:
 - ◇ $T_i(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
 - ◇ $T_i(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- zdarzenia sieci są uporządkowane zgodnie z ich następstwem w czasie i ponumerowane liczbami $1, 2, \dots, n$

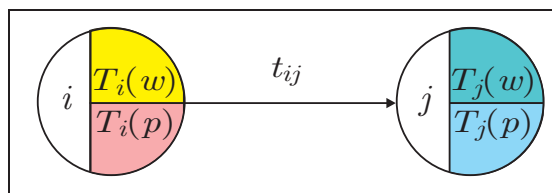
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Określenie terminów

- Terminy najwcześniejsze
 - ◇ dla zdarzenia początkowego $T_1(w) = 0$
 - ◇ dla pozostałych:
$$T_i(w) = \max\{T_i(w) - t_{ij}\}; \quad i \in P(j), \quad j \in \{2, \dots, n\}$$
gdzie $P(j)$ - zbiór poprzedników zdarzenia j , $P(j) = \{i : (i, j) \in E\}$
- Terminy najpóźniejsze
 - ◇ $T_n(p) = T_n(w)$ – dla wierzchołka końcowego
 - ◇ dla pozostałych
$$T_i(p) = \min\{T_j(p) - t_{ij}\}; \quad j \in n(i), \quad i \in \{n - 1, \dots, 1\}$$
gdzie $n(i)$ - zbiór następników zdarzenia i

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Interpretacja sieciowa terminów

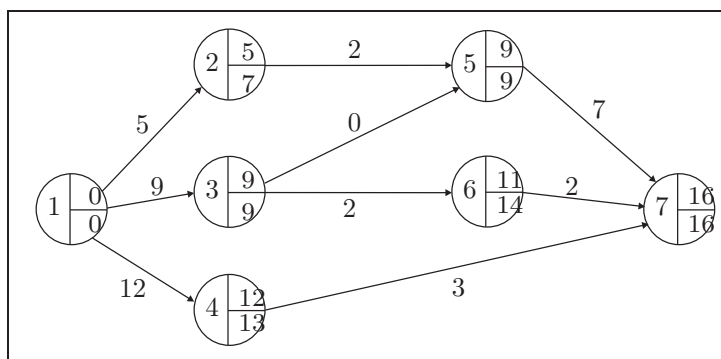


gdzie

- $T_i(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- $T_i(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- $T_j(w)$ – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia j
- $T_j(p)$ – najpóźniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia j
- t_{ij} – czas realizacji czynności (i, j)

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Przykład 6.2. Określić terminy najwcześniejsze i najpóźniejsze w następującej sieci czynności:



- $T_1(w) = 0$
- $T_2(w) = 5 + 0$
- $T_3(w) = 9 + 0$
- $T_4(w) = 12 + 0$
- $T_5(w) = \max\{5 + 2, 9 + 0\} = 9$
- $T_6(w) = 9 + 2 = 11$
- $T_7(w) = \max\{9 + 7, 11 + 2, 12 + 3\} = 16$
- $T_7(p) = 16$
- $T_6(p) = 16 - 2 = 14$
- $T_5(p) = 16 - 7 = 9$
- $T_4(p) = 16 - 3 = 13$
- $T_3(p) = \min\{14 - 2, 9 - 0\} = 9$
- $T_2(p) = 9 - 2 = 7$
- $T_1(p) = \min\{7 - 5, 9 - 9, 13 - 12\} = 0$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Luz zdarzenia

- Luz zdarzenia i

$$L_i = T_i(p) - T_i(w)$$

- Luz krytyczny

$$L_i = 0$$

- Zdarzenie krytyczne – zdarzenie, dla którego luz jest równy zero
- Ścieżka (droga) krytyczna $(i_0, i_1), (i_1, i_2) \dots (i_{p-1}, i_p)$ łączy zdarzenie początkowe $i_0 = 1$ ze zdarzeniem końcowym $i_p = n$, dla której czas

$$\tau = \sum_{k=1}^p t_{i_{k-1}i_k}$$

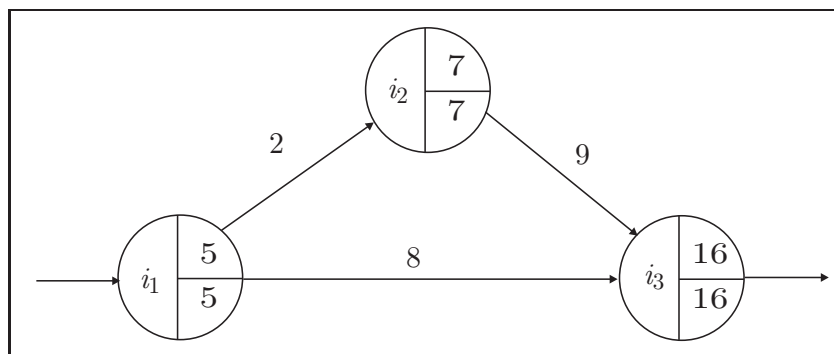
jest najdłuższy

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

UWAGI

- czas $\tau = T_n(w) = T_n(p)$ – najkrótszy cykl realizacji przedsięwzięcia
- czynności krytyczne – czynności leżące na ścieżce krytycznej
- ciąg zdarzeń krytycznych nie wyznacza w sposób jednoznaczny ścieżki krytycznej

Przykład 6.3.



Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

WYZNACZANIE ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ

- Definiujemy zapas całkowity czasu czynności (i, j)

$$z_{ij}(c) = T_j(p) - T_i(w) - t_{ij}$$

- Zapas całkowity jest rezerwą czasu, którą dana czynność dysponuje wspólnie z innymi czynnościami leżącymi na tym ciągu niekrytycznym

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby czynność (i, j) była czynnością krytyczną jest równość

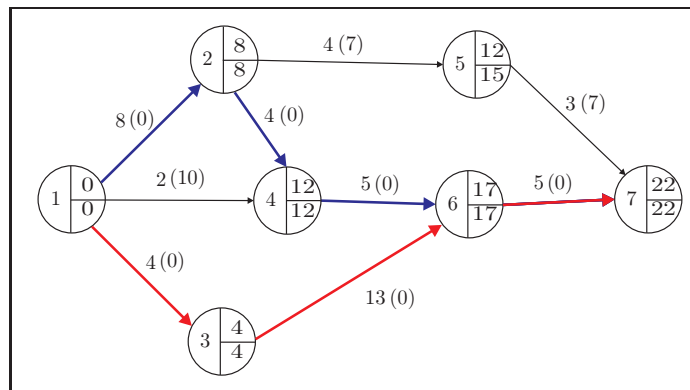
$$z_{ij}(c) = 0$$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania operacyjne
Programowanie sieciowe.

17

Przykład 6.4. Rozważmy poniższą sieć czynności. Wyznaczyć ścieżkę krytyczną



Obliczamy zapasy

1. $z_{12} = T_2(p) - T_1(w) - t_{12} = 0$
2. $z_{13} = 4 - 0 - 4 = 0$
3. $z_{14} = 12 - 0 - 2 = 10$
4. $z_{24} = 12 - 8 - 4 = 0$
5. $z_{25} = 19 - 8 - 4 = 7$
6. $z_{46} = 17 - 12 - 5 = 0$
7. $z_{36} = 17 - 4 - 13 = 0$
8. $z_{67} = 22 - 17 - 5 = 0$
9. $z_{57} = 22 - 12 - 3 = 7$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

UWAGI!

1. Jeżeli czasy czynności krytycznych nie ulegną wydłużeniu, to całe przedsięwzięcie zostanie zrealizowane w najkrótszym możliwym terminie $T_n(w) = T_n(p)$
2. Zapas swobodny czynności (i, j) : $z_{ij}(s) = T_j(w) - T_i(w) - t_{ij}$ określa, o ile jednostek czasu może spóźnić się rozpoczęcie czynności (i, j) , bez naruszenia terminu najwcześniejszego zdarzenia j (bez naruszenia $T_j(w)$)
3. Zapas niezależny czynności (i, j) : $z_{ij}(n) = T_j(w) - T_i(p) - t_{ij}$ wyraża dopuszczalne opóźnienie czynności (i, j) w przypadku, gdy zdarzenie i zaistniałoby w terminie najpóźniejszym, a zdarzenie j powinno rozpocząć się w terminie najwcześniejszym
4. Pomiedzy typami zapasów zachodzi zależność

$$\begin{array}{ccccc} \text{niezależny} & & \text{swobodny} & & \text{całkowity} \\ z_{ij}(n) & \leq & z_{ij}(s) & \leq & z_{ij}(c) \end{array}$$

5. Dla czynności krytycznych wszystkie rodzaje zapasów są równe zero

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

HARMONOGRAM REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘCIA

- Na podstawie modelu sieciowego przedsięwzięcia i obliczonych wartościach można zobrazować przedsięwzięcie w postaci diagramu
- Niech
 - $P_{ij}(w)$ - najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności (i, j)
 - $P_{ij}(p)$ - najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności (i, j)
 - $K_{ij}(w)$ - najwcześniejszy termin zakończenia czynności (i, j)
 - $K_{ij}(p)$ - najpóźniejszy dopuszczalny termin zakończenia czynności (i, j)

gdzie:

$$P_{ij}(w) = T_i(w)$$

$$P_{ij}(p) = T_j(p) - t_{ij}$$

$$K_{ij}(w) = T_i(w) + t_{ij}$$

$$K_{ij}(p) = T_j(p)$$

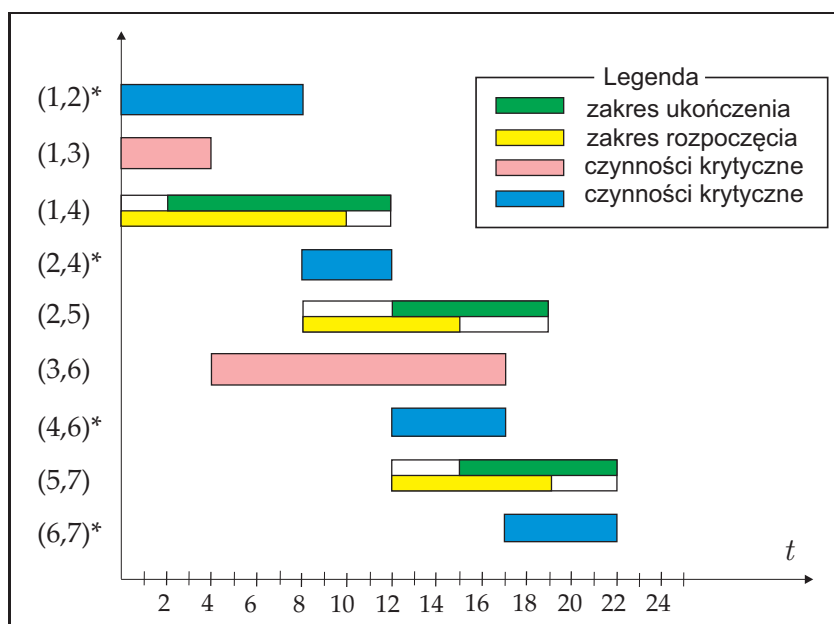
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Tablica harmonogramu realizacji przedsięwzięcia

(i, j)	t_{ij}	$P_{ij}(w)$	$P_{ij}(p)$	$K_{ij}(w)$	$K_{ij}(p)$	$Z_{ij}(c)$	$Z_{ij}(s)$	$Z_{ij}(n)$
$(1, 2)^*$	8	0	0	8	8	0	0	0
$(1, 3)^*$	4	0	0	4	4	3	0	0
$(1, 4)$	2	0	10	2	12	10	10	10
$(2, 4)^*$	4	8	8	12	12	0	0	0
$(2, 5)$	4	8	15	12	19	7	0	0
$(3, 6)^*$	10	4	4	17	17	0	0	0
$(4, 6)^*$	5	12	12	17	17	0	0	0
$(5, 7)$	3	12	19	15	22	7	7	0
$(6, 7)^*$	5	17	17	22	22	0	0	0

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Diagram realizacji przedsięwzięcia



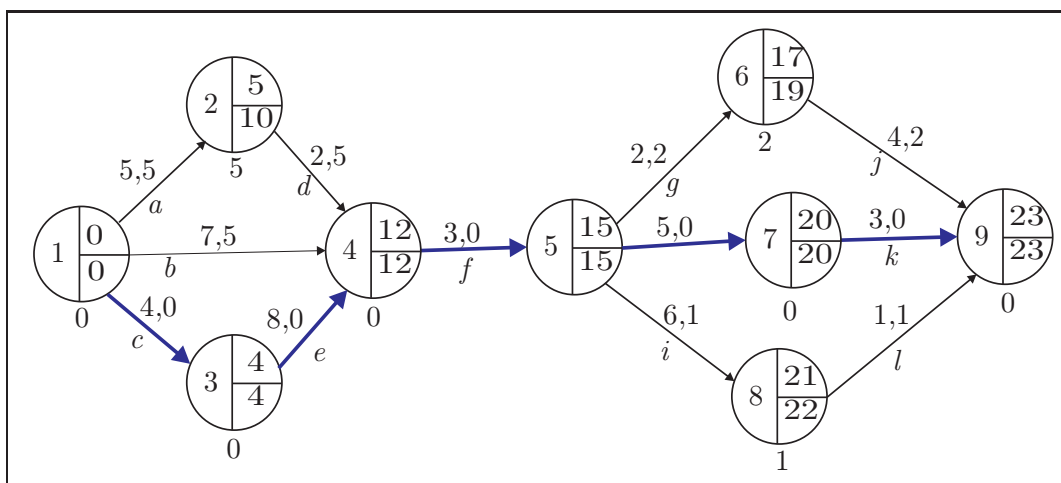
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Przykład 6.5. Mając dane zawarte w tabeli narysować wykres sieciowy oraz diagram realizacji przedsięwzięcia, obliczyć najkrótszy czas realizacji oraz wyznaczyć ścieżkę krytyczną

Z czas trwania czynności t_{ij}	Oznaczenie czynności	Poprzedniki
5	<i>a</i>	-
7	<i>b</i>	-
4	<i>c</i>	-
2	<i>d</i>	<i>a</i>
8	<i>e</i>	<i>c</i>
3	<i>f</i>	<i>b, d, e</i>
2	<i>g</i>	<i>f</i>
5	<i>h</i>	<i>f</i>
6	<i>i</i>	<i>f</i>
4	<i>j</i>	<i>g</i>
3	<i>k</i>	<i>h</i>
1	<i>l</i>	<i>i</i>

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Sieć czynności



Minimalny czas wykonania czynności: 23h

Ścieżka krytyczna: $c - e - f - h - k$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

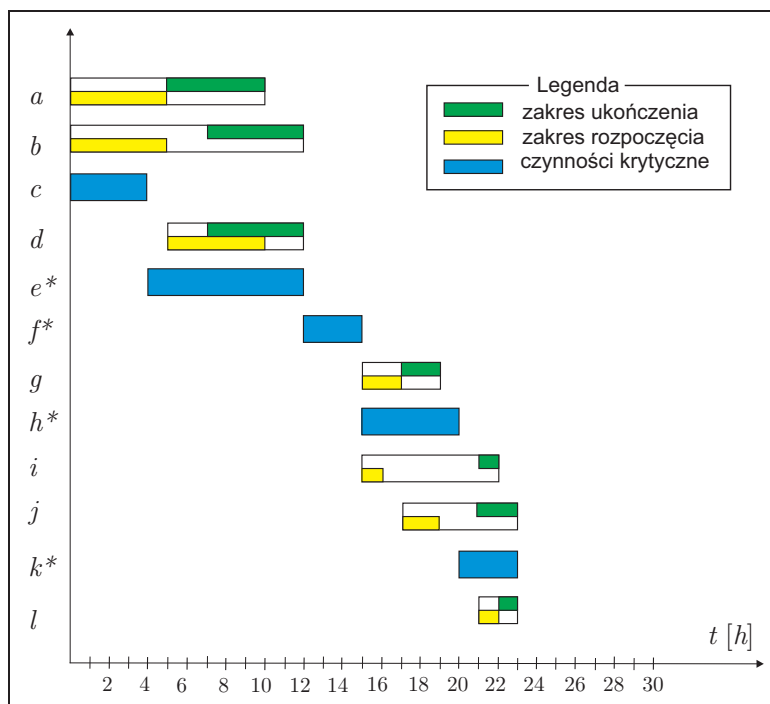
Harmonogram wykonania czynności

czynność	t_{ij}	$P_{ij}(w)$	$P_{ij}(p)$	$K_{ij}(w)$	$K_{ij}(p)$	$z_{ij}(c)$
<i>a</i>	5	0	5	5	10	5
<i>b</i>	7	0	5	7	12	5
<i>c</i> *	4	0	0	4	4	0
<i>d</i>	2	5	10	7	12	5
<i>e</i> *	8	4	4	12	12	0
<i>f</i> *	3	12	12	15	15	0
<i>g</i>	2	15	17	17	19	2
<i>h</i> *	5	15	15	20	20	0
<i>i</i>	6	15	16	21	22	1
<i>j</i>	4	17	19	21	23	2
<i>k</i> *	3	20	20	23	23	0
<i>l</i>	1	21	22	22	23	1

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Badania operacyjne
Programowanie sieciowe.

25



Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

METODA PERT. WPROWADZENIE

- PERT (ang. *Program Evaluation and Review Technique*)
- Metoda należy do sieci o strukturze logicznej zdeterminowanej
- Parametry opisujące poszczególne czynności mają charakter stochastyczny
- Założenia metody CPM stosuje się odważne założenia:
 - najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności
 - najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności
 - parametry są obliczane na podstawie znajomości czasu trwania danej czynności
- W metodzie PERT czas trwania każdej czynności jest szacowany
- Obliczanie oczekiwanego czasu trwania czynności dokonuje się na podstawie trzech ocen czasu: optymistycznej, najbardziej prawdopodobnej i pesymistycznej

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

ZAŁOŻENIA

Niech:

- t_c - czas optymistyczny
- t_m - czas najbardziej prawdopodobny
- t_p - czas pesymistyczny

wtedy wartość oczekiwana t_0

$$t_0 = \frac{t_c + 4t_m + t_p}{6}$$

jest to wartość oczekiwana rozkładu beta

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Realizacja metoda PERT

1. Definiowanie wszystkich czynności projektu
2. Ustalenie następstwa czasowego czynności
3. Oszacowanie czasu trwania każdej czynności
4. Wyznaczenie ścieżki krytycznej oraz kryteriów jakościowych i ilościowych
5. Tworzenie harmonogramu
6. Przeszacowania i poprawki zgodne ze stanem rzeczywistym

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Przykład. 7.1.

Dla wykonania przedsięwzięcia P opracowano dwa warianty techniczne A i B . Należy na podstawie analizy sieciowej dokonać wyboru wariantu gwarantującego większą szansę dotrzymania terminu dyrektywnego $t_d = 48$ dni. Charakterystyki czynności dla obu wariantów podano w poniższych tabelach

Wariant A

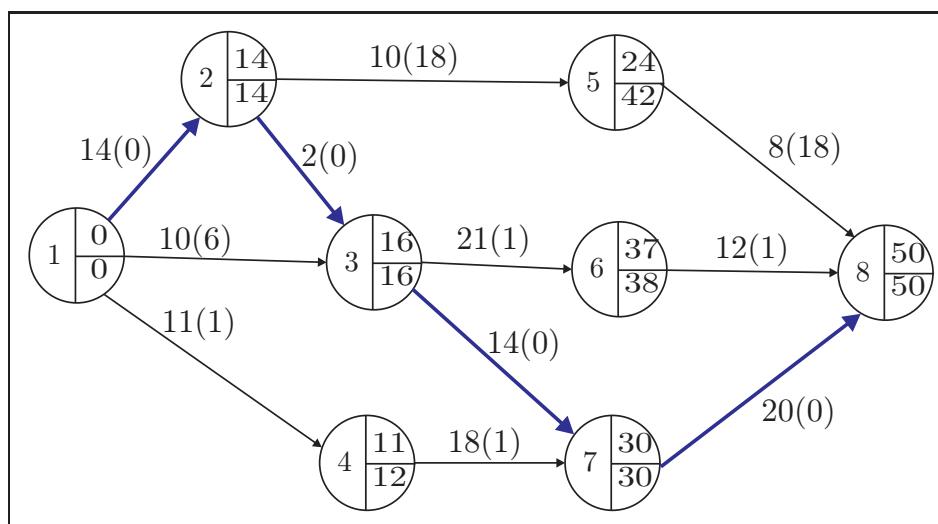
(i, j)	t_c	t_m	t_p	t_0
(1, 2)	13	14	15	14
(1, 3)	5	10	15	10
(1, 4)	7	10	19	11
(2, 3)	2	2	2	2
(2, 5)	10	10	10	10
(3, 6)	20	21	22	21
(3, 7)	4	16	16	14
(4, 7)	5	20	23	18
(5, 8)	5	8	11	8
(6, 8)	12	12	12	12
(7, 8)	18	18	30	20

Wariant B

(i, j)	t_c	t_m	t_p	t_0
(1, 2)	17	20	20	19,5
(1, 3)	14	14	14	14
(1, 4)	1	5	15	6
(2, 5)	2	10	12	9
(3, 6)	17	18	25	19
(3, 7)	15	15	15	15
(4, 7)	2	5	14	6
(5, 8)	18	20	28	21
(6, 8)	14	15	22	16
(7, 8)	18	21	24	21

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

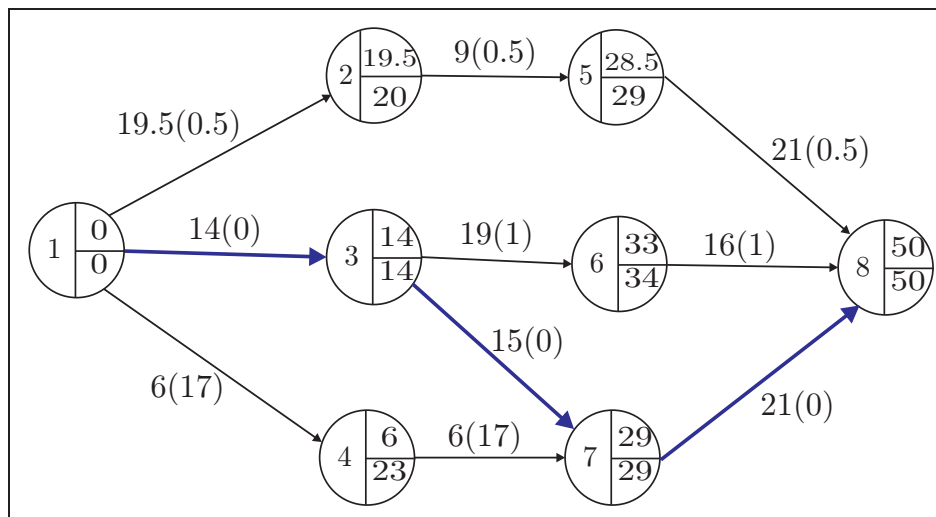
Sieć czynności dla wariantu A



- ścieżka krytyczna: 1 – 2 – 3 – 7 – 8
- szacowany czas trwania przedsięwzięcia: 50 dni

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Sieć czynności dla wariantu B



- ścieżka krytyczna: 1 – 3 – 7 – 8
- szacowany czas trwania przedsięwzięcia: 50 dni

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wnioski

- Dla obu wariantów oczekiwany czas trwania czynności wynosi 50 dni, a w założeniu termin dyrektywny wynosi $t_d = 48$ dni
- Parametry opisujące przedsięwzięcie mają charakter probabilistyczny i czas trwania czynności mieści się w granicach $[t_p, t_c]$

• **Problem:**

Jak określić, który z wariantów ma większe szanse dotrzymania terminu dyrektywnego?

• **Rozwiązanie:**

Wprowadzamy pojęcie **wariancji** – określenie niepewności związanej z daną czynnością

- Interpretacja wariancji

Im większa jest rozpiętość ocen między czasem optymistycznym i pesymistycznym, tym większa jest niepewność związana z daną czynnością

- Definicja wariancji

$$\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_c}{6} \right)^2$$

Im większa wartość wariancji, tym większa niepewność z czasem trwania danej czynności

Przykład 7.2.

Obliczyć niepewności wykonania przedsięwzięcia P z przykładu 7.1

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wariant A

(i, j)	t_c	t_m	t_p	t_0	σ_2
*(1, 2)	13	14	15	14	$\frac{1}{9}$
(1, 3)	5	10	15	10	$\frac{25}{9}$
(1, 4)	7	10	19	11	4
*(2, 3)	2	2	2	2	0
(2, 5)	10	10	10	10	0
(3, 6)	20	21	22	21	$\frac{1}{9}$
*(3, 7)	4	16	16	14	4
(4, 7)	5	20	23	18	9
(5, 8)	5	8	11	8	1
(6, 8)	12	12	12	12	0
*(7, 8)	18	18	30	20	4

ścieżka krytyczna:

1 - 2 - 3 - 7 - 8

wariancja całkowita:

$$\sigma^2 = \frac{1}{9} + 0 + 4 + 4 = 8\frac{1}{9}$$

Wariant B

(i, j)	t_c	t_m	t_p	t_0	σ_2
(1, 2)	17	20	20	19,5	$\frac{1}{4}$
* (1, 3)	14	14	14	14	0
(1, 4)	1	5	15	6	$\frac{49}{9}$
(2, 5)	2	10	12	9	$\frac{25}{9}$
(3, 6)	17	18	25	19	$\frac{49}{36}$
* (3, 7)	15	15	15	15	0
(4, 7)	2	5	14	6	4
(5, 8)	18	20	28	21	$\frac{25}{9}$
(6, 8)	14	15	22	16	$\frac{16}{9}$
* (7, 8)	18	21	24	21	1

ścieżka krytyczna:

$$1 - 3 - 7 - 8$$

wariancja całkowita:

$$\sigma^2 = 0 + 0 + 1 = 1$$

Należy wybrać wariant A, bo stopień niepewności jest większy i jest szansa na dotrzymanie terminu dyrektywnego $t_d = 48$ dni

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

- Wybierając wariant A przedsięwzięcie może zostać zrealizowane w przedziale

$$41\frac{8}{9} - 58\frac{1}{9} \text{ dnia}$$

- Wybierając wariant B przedsięwzięcie może zostać zrealizowane w przedziale

$$49 - 51 \text{ dnia}$$

- Nasuwają się kolejne pytania
 - ◇ Jakie jest prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia do 48 dni?
 - ◇ Jakie jest prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia do 50 dni?
 - ◇ Jakiemu przedziałowi czasu realizacji przedsięwzięcia odpowiada dane prawdopodobieństwo np. 0,95?

Institut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

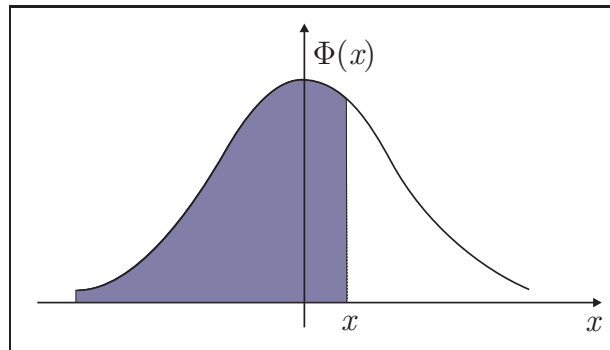
ZAŁOŻENIA

Dystrybuanta rozkładu normalnego jest bardzo pomocna przy określaniu prawdopodobieństwa realizacji przedsięwzięcia

Definicja dystrybuanty rozkładu normalnego

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Interpretacja geometryczna



Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

- Obszar zakreślony - prawdopodobieństwo zakończenia przedsięwzięcia w terminie do t_d

$$P(t_d \leq t_r) = \Phi(x)$$

- Obliczanie prawdopodobieństwa z definicji – bardzo uciążliwe i czasochłonne
- Praktyczne określanie prawdopodobieństwa – tablice rozkładu normalnego
 - ◇ Tablice zawierają wartości dystrybuanty dla liczb dodatnich $x \geq 0$ (prawa połówka dystrybuanty)
 - ◇ Jak więc policzyć wartość dystrybuanty dla liczb ujemnych $x < 0$?

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Wiadomo, że

$$\Phi(\text{inf}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\text{inf}}^{\text{inf}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

i że wykres dystrybuanty jest symetryczny. Zatem

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

- W tabelach są podawane dla dystrybuanty rozkładu normalnego $N(0, 1)$
- Dane należy przeskalować tak, aby posiadały wartość średnią równą zero i odchylenie standardowe równe 1

$$X = \frac{t_d - t_r}{\sigma_c}$$

gdzie: t_d - czas dyrektywny

t_r - czas modelowy ukończenia przedsięwzięcia

σ_c - odchylenie standardowe ($\sigma_c = \sqrt{\sigma_c^2}$)

X - czas przeskalowany do $N(0, 1)$

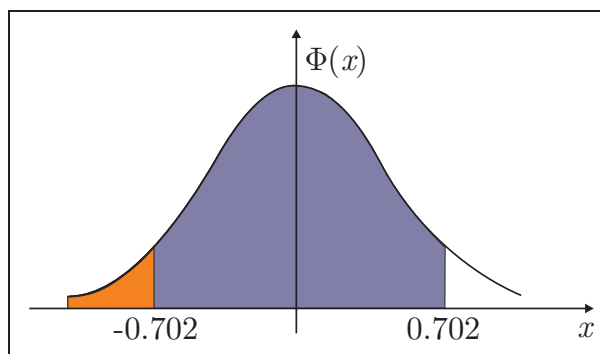
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Przykład. 7.3

a) Prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia do 48 dni dla wariantu A

$$X = \frac{48 - 50}{\sqrt{8\frac{1}{9}}} = -0,702$$

$$P(t_d \leq t_r) = 1 - \Phi(-x) = 1 - 0,76 = 0,24 \quad (24\%)$$

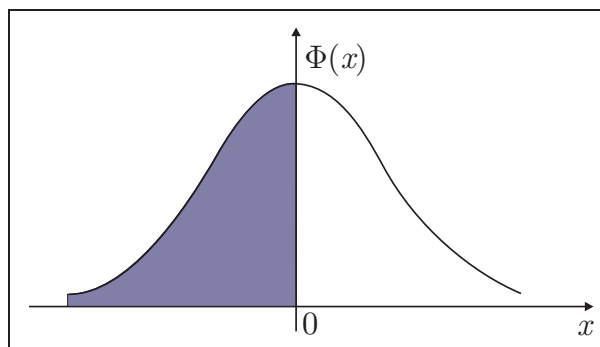


Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

b) Prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia do 50 dni dla wariantu *A*

$$X = \frac{50 - 50}{\sqrt{8\frac{1}{9}}} = 0$$

$$P(t_d \leq t_r) = \Phi(x) = 0 = 0,5 \quad (50\%)$$

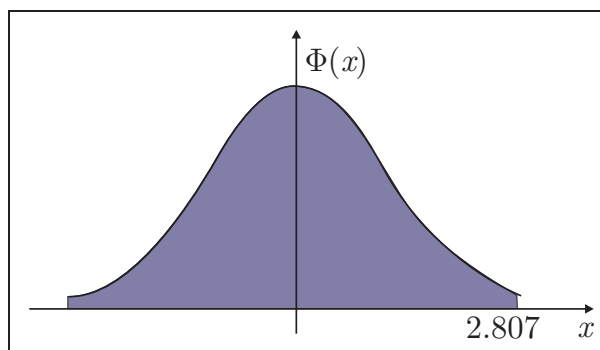


Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

c) Prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia do 58 dni dla wariantu *A*

$$X = \frac{58 - 50}{\sqrt{8\frac{1}{9}}} = 2,807$$

$$P(t_d \leq t_r) = 0,997 \quad (99,7\%)$$



Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

d) Obliczyć przedział czasu realizacji przedsięwzięcia odpowiadający prawdopodobieństwu 0,95

$$P(t_d \leq t_r) = 0,95$$

odczytujemy z tablic wartość X

$$X = 1,64$$

podstawiamy do wzoru

$$1,64 = \frac{t_d - 50}{\sqrt{8\frac{1}{9}}}$$

przekształcamy

$$t_d = 1,65 \cdot \sqrt{8\frac{1}{9}} + 50 = 54,7$$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

e) Obliczyć prawdopodobieństwo ukończenia przedsięwzięcia do 48 dni dla wariantu B

$$X = \frac{48 - 50}{\sqrt{1}} = -2$$

$$P(t_d \leq t_r) = 1 - \Phi(-x) = 1 - 0,977 = 0,023 \quad (2,3\%)$$

Uwaga!

Faktycznie w przykładzie 7.2 ustaliliśmy, że lepszy okaże się wariant A

Obliczyć prawdopodobieństwo ukończenia przedsięwzięcia do 58 dni dla wariantu B

$$X = \frac{58 - 50}{\sqrt{1}} = 8$$

$$P(t_d \leq t_r) \approx 1$$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Obliczyć przedział czasu realizacji przedsięwzięcia odpowiadający prawdopodobieństwu 0,95

$$P(t_d \leq t_r) = 0,95$$

odczytujemy z tablic wartość X

$$X = 1,65$$

podstawiamy do wzoru

$$1,65 = \frac{t_d - 50}{\sqrt{1}}$$

przekształcamy

$$t_d = 1,65 + 50 = 51,65$$

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski