GRY

Maciej Patan

Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

WPROWADZENIE

➢ Sytuacje konfliktowe występują dosyć często

➢ W takich sytuacjach dochodzi do sprzeczności interesów różnych obiektów ekonomicznych

➢ Dlatego istnieje potrzeba opracowania sposobów skutecznego działania stron biorących udział w konflikcie

➢ Wiąże się to z podejmowaniem decyzji w warunkach sprzeczności interesów

Zakres problemowy teorii gier

- Sytuacje konfliktowe można rozwiązać stosując algorytmy z teorii gier
- Teoria gier to matematyczna teoria pewnej klasy modeli, służących podejmowaniu decyzji w warunkach konfliktu i/lub nieokreśloności.

Definicje

Konflikt

Różnica interesów np. pomiędzy firmami rywalizującymi o pozyskanie klientów; dodając czynnik losowy może wystąpić konflikt między uczestnikami, a „naturą”

Nieokreśloność

Brak informacji o kształtowaniu się ważnych elementów sytuacji. Nieokreśloność może wynikać również z nieprzewidywalności działań konkurencji

Opis sytuacji

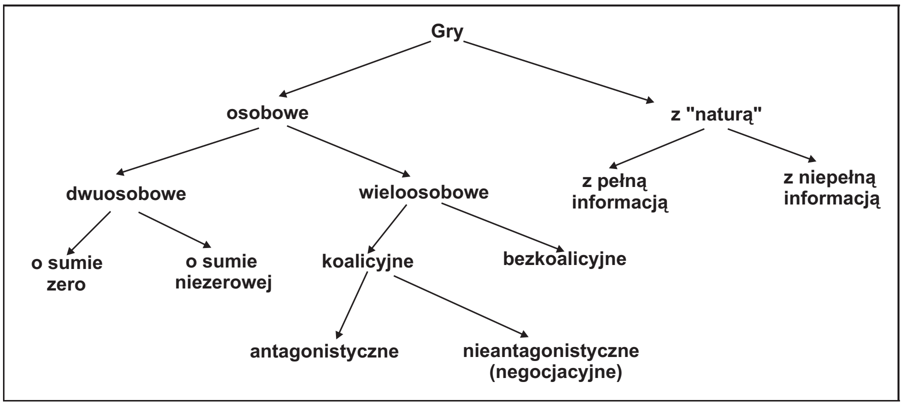
Składowe sytuacji konfliktowej:

- uczestnicy konfliktu (gracze)
- opis interesów uczestników konfliktu (strategie)
- stopień nieokreśloności

Klasyfikacja sytuacji konfliktowych

1. konflikt z przeciwnikiem rozumnym (gry osobowe), konflikt z przeciwnikiem nierozumnym (gry z naturą)
2. antagonistyczne, nieantagonistyczne
3. koalicyjne, bezkoalicyjne

Klasyfikacja gier



GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Definicja

> Są to gry z dwoma graczami. Suma gry to różnica pomiędzy zyskiem z gry wygrywającego, a stratą przegrywającego, jest równa zero

Jeśli dodamy wszystkie wartości w grze i w wyniku uzyskamy zero dla każdej pary strategii to gra jest grą o sumie zero

Założenia:

1. dwóch zantagonizowanych graczy
2. przegrana jednego gracza równa się wygranej drugiego
3. zdeterminowana, skończona liczba strategii

Strategie:

1. strategia dominująca – jeżeli jakaś strategia nie prowadzi do gorszych wypłat niż inne strategie, a w niektórych przypadkach prowadzi do wypłat lepszych, to strategię taką nazywa się strategią dominującą
2. strategia maksyminowa – jest to strategia, która prowadzi do maksymalizacji najniższych możliwych wypłat w danej grze
3. strategia mieszana – jeżeli dla gracza A dane są strategie $a_1, a_2, \ldots a_n$ to strategia mieszana jest dowolną kombinacją tych strategii stosowanych z prawdopodobieństwem $p_1, p_2, \ldots p_n$, przy czym:

   $$p_i \geqslant 0 \text{ dla } (i = 1, 2, \ldots, n)$$

   oraz

   $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Strategie 1) i 2) należą do grupy tzw. strategii czystych

Macierz wypłat

Macierz, której elementami są zyski lub straty graczy dla wszystkich stosowanych strategii w grze

Metody rozwiązywania

① poszukiwanie rozwiązania w strefie czystych strategii (punkt siodłowy)

② dominacja macierzy wypłat

③ metoda graficzna

④ rozwiązanie analogicznego zadania programowania liniowego

⑤ algorytm iteracyjny Browna

Przykład 9.1

Przedsiębiorstwo produkcyjne A może uruchomić produkcję pewnego produktu w wysokości 100, 200 lub 300 tys. szt. Konkurencyjne przedsiębiorstwo B może postąpić w ten sam sposób. Poniższa tablica zawiera zyski w mld zł przedsiębiorstwa A (a straty B) przy produkcji wyrobów w zależności od decyzji przedsiębiorstwa B. Podjąć decyzję o wielkości produkcji będąc menedżerem przedsiębiorstwa A.

W	B_1	B_2	B_3
A_1	20	-150	-250
A_2	150	-80	-100
A_3	250	100	40

Menedżer A ma do dyspozycji trzy strategie: produkować 100, 200 lub 300 tys. szt. Podobnie menedżer B ma trzy strategie: produkować 100, 200 lub 3000 tys. szt.

Postępowanie:

Sprawdzamy, czy gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych

Wyznaczamy

- minimalną wartość w każdym wierszu (przyjmujemy, że gracz B wybierze najbardziej niekorzystną dla A strategię)
- maksymalną wartość w każdej kolumnie (gracz B zakłada, że gracz A wybierze najgorszą dla B sytuację)

Def.

> Jeżeli maksymalna z minimalnych wygranych jest równa minimalnej z maksymalnych przegranych, to wtedy istnieje rozwiązanie gry w zbiorze strategii czystych (strategia maksyminowa, punkt siodłowy)

Rozwiązanie:

- minimalne wartości dla strategii gracza A

$$\min A_1 = -250, \quad \min A_2 = -100, \quad \min A_3 = 40$$

- maksymalna wygrana gracza A

$$\max A = [-250 \;\; -100 \; 40] = 40$$

- maksymalne wartości dla strategii gracza B

$$\min B_1 = 250, \quad \min B_2 = 100, \quad \min B_3 = 40$$

- minimalna wygrana gracza B

$$\min B = [250 \; 100 \; 40] = 40$$

● sprawdzamy, czy istnieje punkt siodłowy

$$\max(\min A) = 40 \qquad \min(\max B) = 40 \quad \Rightarrow \max(\min A) = \min(\max B)$$

Istnieje punkt siodłowy na przecięciu trzeciego wiersza i trzeciej kolumny i jest to element W_{33} macierzy wypłat.

Odpowiedź:

Menedżer A powinien podjąć decyzję o produkcji 300 tys. szt. i wtedy bez względu na decyzję przedsiębiorstwa B osiagnie zysk co najmniej 40 mld. Przedsiębiorstwo B powinno podjąć decyzję o produkcji 300 tys. szt. i wtedy bez względu na decyzję menedżera A straci nie więcej niż 40 mld.

Problem:

Co zrobić w przypadku kiedy nie ma rozwiązania w zbiorze strategii czystych?

Przykład 9.2

Problem jak w przykładzie 9.1, lecz macierz wypłat ma inne wartości

W	B_1	B_2	B_3
A_1	10	230	50
A_2	150	250	140
A_3	80	200	220

W tej grze nie ma punktu równowagi – nie ma rozwiązania w zbiorze strategii czystych

$$\max(\min A) = 140 \neq \min(\max B) = 150$$

Rozwiązania należy szukać w zbiorze strategii mieszanych

1. Sprawdzamy, czy nie występują strategie zdominowane
   - Strategia A_1 daje w każdym przypadku gorsze wygrane niż A_2, czyli gracz A nie powinien stosować strategii A_1 bo jest ona zdominowana przez A_2
   - Strategia B_2 jest zdominowana przez B_1, czyli gracz B nie powinien stosować strategii B_2
2. Wykreślamy strategie zdominowane i otrzymujemy macierz wypłat

W	B_1	B_3
A_2	150	140
A_3	80	220

3. Określamy prawdopodobieństwa użycia strategii
   - p – prawdopodobieństwo stosowania strategii A_2
   - $1-p$ – prawdopodobieństwo stosowania strategii A_3
   - q – prawdopodobieństwo stosowania strategii B_1
   - $1-q$ – prawdopodobieństwo stosowania strategii B_3

4. wygrana gracza A, w przypadku gdy B będzie stosował strategię B_1:

$$v = 150p + 80(1-p)$$

gdy B będzie używał strategii B_2:

$$v = 140p + 220(1-p)$$

Porównując równania otrzymujemy

$$150p + 80(1-p) = 140p + 220(1-p)$$

$$p \approx 0,93$$

$$v \approx 145,3$$

Menedżer A powinien produkować 200 tys. szt. z czestością $\frac{14}{15}$ i 300 tys. szt. z częstością $\frac{1}{15}$. Przy takim poziomie produkcji przeciętny zysk wyniesie $v \approx 145,3$ mld.

5. wygrana gracza B w przypadku, gdy A będzie stosował strategię A_2:

$$w = 150q + 140(1 - q)$$

gdy A będzie stosował strategię A_3

$$w = 80q + 220(1 - q)$$

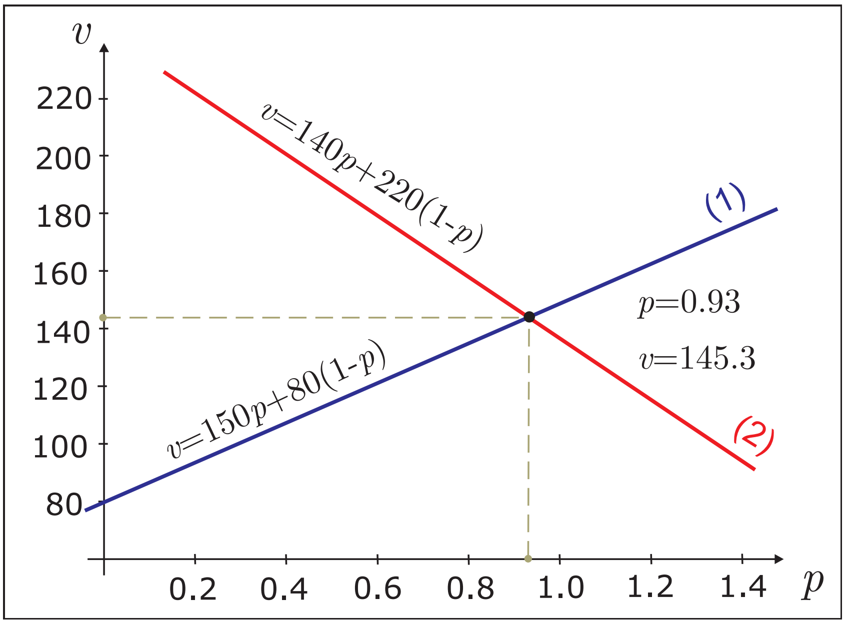
$$150q + 140(1 - q) = 80q + 220(1 - q)$$

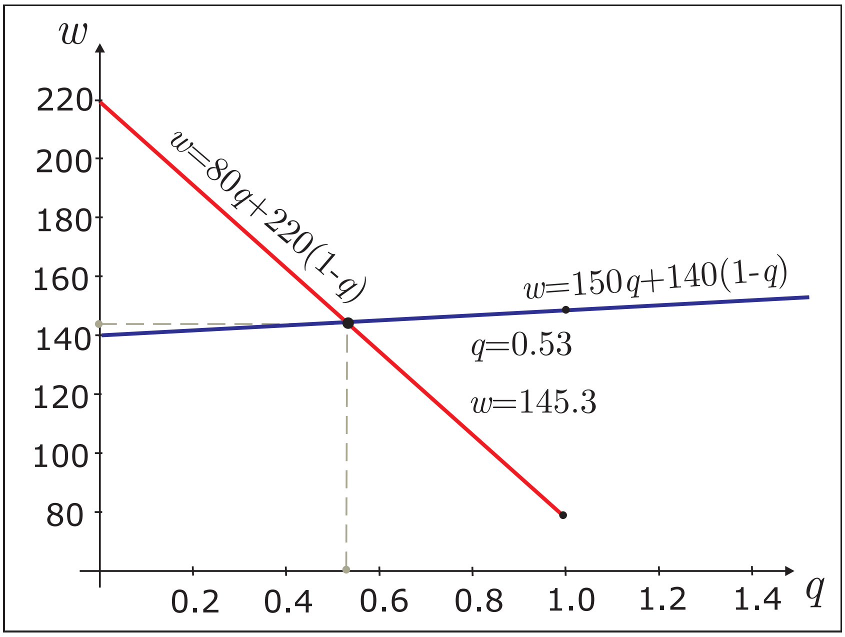
$$q = \frac{8}{15} \approx 0,53$$

$$w = 145,3$$

Menedżer B powinien zarządzić produkcję 100 tys. szt. z częstością $\frac{8}{15}$ i 300 tys. szt. z częstością $\frac{7}{15}$. Jego strata wyniesie wtedy 145,3 mld.

Graficzne wyznaczenie p i q





Rozwiązanie jako ZPL

- gracz A stosuje strategię A_2 z częstością x_1 i strategię A_3 z częstością x_2
- gracz A stosuje strategię optymalną, a gracz B strategię B_1, wtedy

$$150x_1 + 80x_2 \geqslant v$$

- gracz A stosuje strategię optymalną, a gracz B strategię B_3, wtedy

$$140x_1 + 220x_2 \geqslant v$$

Ograniczenia

$$150x_1 + 80x_2 \geqslant v$$

$$140x_1 + 220x_2 \geqslant v$$

dzielimy przez v

$$150p_1 + 80p_2 \geqslant 1$$

$$140p_1 + 220p_2 \geqslant 1$$

Funkcja celu

z własności prawdopodobieństwa otrzymujemy

$$x_1 + x_2 = 1$$

wiadomo, że

$$p_1 = \frac{x_1}{v}, \quad p_2 = \frac{x_2}{v}$$

otrzymujemy

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{v}$$

należy dobrać tak p_1 i p_2 aby wartość gry była jak największa

$$v \to \max \qquad p_1 + p_2 = \frac{1}{v} \to \min$$

Postać programu liniowego

$$\min[z = p_1 + p_2]$$

$$150p_1 + 80p_2 \geqslant 1$$

$$140p_1 + 220p_2 \geqslant 1$$

$$p_1 \geqslant 0, p_2 \geqslant 0$$

Po rozwiązaniu ZPL

$$p_1 \approx 0,01 \quad \text{i} \quad p_2 \approx 0,000482$$

$$v = \frac{1}{p_1 + p_2} \approx 145,3$$

$$x_1 = p_1 v = 0,93, \qquad x_2 = p_1 v = 0,07$$

Analogicznie można wyznaczyć optymalne rozwiązanie dla gracza B

Algorytm Brown'a – wprowadzenie

- dla gier o dużych rozmiarach prezentowane do tej pory metody są mało efektywne
- algorytm Brown'a ma zastosowanie w grach o dużych wymiarach
- prosty algorytm, łatwy w oprogramowaniu
- metoda iteracyjna
- dla dużej liczby iteracji zapewnia zbieżność rozwiązań
- metoda wrażliwa na liczbę iteracji – aby uzyskać dokładne wyniki należy wykonać dużą liczbę iteracji $\gg 100$.

Postać algorytmu Brown'a

Krok 1. Gracz A wybiera arbitralnie strategię

Krok 2. Gracz B sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez A i wybiera najlepszą strategię ze swojego punktu widzenia

Krok 3. Gracz A sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez B i wybiera najlepszą strategię ze swojego punktu widzenia

Krok 4. Taki jak Krok 2

Krok 5. Sprawdź, czy wykonano zamierzoną liczbę iteracji, jeśli nie, to idź do kroku 3 w innym przypadku STOP

Przykład 9.3

Dana jest macierz wypłat. Określić jakie strategie i z jaką częstością powinni stosować obaj gracze. Zastosować algorytm Browna

W	B_1	B_2	B_3
A_1	10	230	50
A_2	150	250	140
A_3	80	200	220

1. gracz A wybiera A_2
2. gracz B wybiera B_3 - najmniejsze straty
3. gracz A wybiera A_3 - największy zysk
4. gracz B sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez A i wybiera B_1
5. gracz A sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez B i wybiera A_3

	B_1	B_2	B_3
A_1	10	230	50
A_2	150	250	140
A_3	80	200	220

B_3	B_1	B_1	B_1^*
50	60	70	80
140	290	440	590
220	300	380	460

A_2	150	250	140
A_3	230	450	360
A_3	310	650	580
A_2	460	900	720

Po 4 iteracjach algorytmu

- gracz A powinien stosować strategię A_2 z częstością $\frac{1}{2}$ i A_3 z częstością $\frac{1}{2}$
- gracz B powinien stosować strategię B_1 z częstością $\frac{3}{4}$ i B_3 z częstością $\frac{1}{4}$
- dolna wartość gry
$$v_d = \frac{\min B_1^*}{\text{liczba iteracji}} = \frac{80}{4} = 20$$
- górna wartość gry
$$v_g = \frac{\max B_1^*}{\text{liczba iteracji}} = \frac{590}{4} = 147,5$$
- wartość gry
$$v_d \leqslant v \leqslant v_g$$

GRY Z NATURĄ

➢ Gry z naturą – gry z przeciwnikiem nierozumnym

➢ Przeciwnik nierozumny nie jest zainteresowany wynikiem gry

➢ W grach z naturą mogą wystąpić następujące przypadki:

❶ Stany natury są jednakowo prawdopodobne

❷ Stany natury nie są jednakowo prawdopodobne

➢ Wyboru wyniku gry można dokonać na podstawie reguł decyzyjnych:

❏ kryterium Walda (reguła maxmin) – wybór pesymisty

❏ kryterium Hurwicza

❏ kryterium Bayesa – przeciętna wygrana

❏ kryterium Savage'a – minimalizacja strat

Kryterium Walda

- Jest to kryterium pesymistyczne
- Kryterium wybiera maksymalną wygraną przy założeniu, że natura zachowa się jak najbardziej niekorzystnie
- Postępowanie jest następujące:
  1. Wybieramy minimalną wartość w każdym z wierszy – zakładamy, że zajdą warunki najbardziej niekorzystne dla gracza
  2. Z uzyskanych wyników wybieramy wartość najwyższą
- Uzyskana wartość to minimalna wygrana jaką może uzyskać gracz

Kryterium Hurwicza

- Wybiera się arbitralnie tzw. współczynnik ostrożności

$$\gamma \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$$

- Dla każdej strategii gracza stosujemy wzór

$$v_i = \gamma \cdot \min\, a_{ij} + (1-\gamma) \cdot \max\, a_{ij}$$

  gdzie a_{ij} – elementy macierzy gry
- Ostatecznie wybieramy strategię spełniającą warunek

$$\max v_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

  gdzie n – liczba strategii
- W przypadku gdy $\gamma = 1$, kryterium Hurwicza staje się tożsame z kryterium Walda

Kryterium Bayesa

- ➢ Według kryterium Bayesa najlepszą jest ta strategia, która daje największą przeciętną wygraną
- ➢ Dla każdej strategii należy policzyć średnią wygraną v jako średnią arytmetyczną
- ➢ Zakłada się przy tym, że stany natury są jednakowo prawdopodobne
- ➢ Następnie wybiera się tą strategię, która posiada największą wartość średniej arytmetycznej

Kryterium Savage'a

- ➢ Kryterium Savage'a spełnia postulat minimalizacji oczekiwanych strat wynikłych z podjęcia decyzji gorszej niż najlepsza możliwa dla danego stanu natury (z punktu widzenia gracza)
- ➢ Należy wybrać tę strategię, dla której strata relatywna jest najmniejsza
- ➢ Postępowanie
  1. wyznaczenie macierzy strat relatywnych

     > Strata jest różnicą między największą wygraną możliwą dla danego stanu natury, a wygraną odpowiadającą decyzji gracza

  2. znajdujemy dla każdej strategii maksymalną stratę i wybieramy jako wynik gry odpowiadającą jej strategię

Przykład 9.4.

Rolnik ma wybrać jeden z trzech możliwych terminów siewów I, II, III. Plony z ha w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody A, B, C, D oraz terminu siewu podaje tablica

Terminy siewów	A	B	C	D
I	$21,0$	$15,0$	$32,0$	$16,0$
II	$28,0$	$20,0$	$10,0$	$20,0$
III	$13,0$	$27,0$	$25,0$	$15,0$

Podjąć decyzję o wyborze terminu siewu, jeżeli zależy rolnikowi na

a) jak największym przeciętnym plonie z 1 ha

b) jak najmniejszej stracie w stosunku do najlepszej możliwej sytuacji

Rozwiązanie

Ad. a)

1. Stosujemy kryterium Walda

	NATURA				
	A	B	C	D	Wektor pesymistyczny
I	21	**15**	32	16	15
II	28	20	**10**	10	10
III	**13**	27	25	15	13
Wynik gry		15			

➤ wektor pesymistyczny $v_p = [15\ 10\ 13]$
➤ wynik gry: $\max(w_P) = 15$
Odp.: Najlepszy wynik gry uzyskujemy stosując strategię I

2. Stosujemy kryterium Hurwicza

	A	B	C	D
I	21	15	32	16
II	28	20	10	20
III	13	27	25	15

➤ zakładamy współczynnik ostrożności: $\gamma = 0,4$
➤ wyznaczamy wygrane

$$v_I = 0,4 \cdot \min(21, 15, 32, 16) + 0,6 \cdot \max(21, 15, 32, 16) = 25,2$$
$$v_{II} = 0,4 \cdot \min(28, 20, 10, 20) + 0,6 \cdot \max(28, 20, 10, 20) = 17,4$$
$$v_{III} = 0,4 \cdot \min(13, 27, 25, 15) + 0,6 \cdot \max(13, 27, 25, 15) = 21,4$$

➤ wybieramy najlepszą strategię:

$$\max v = \max[25,2\ 17,4\ 21,4] = 25,2$$

Odp.: Najlepszy wynik gry uzyskujemy stosując strategię I

3. Stosujemy kryterium Bayesa

	A	B	C	D
I	21	15	32	16
II	28	20	10	20
III	13	27	25	15

$$v_{Isr} = \frac{21+15+32+16}{4} = 21$$
$$v_{IIsr} = \frac{28+20+10+20}{4} = 19,5$$
$$v_{IIIsr} = \frac{13+27+25+15}{4} = 20$$

wybieramy najlepszą strategię:

$$\max v = \max[21\ 19,5\ 20] = 21$$

Odp.: Najlepszy wynik gry uzyskujemy stosując strategię I

Ad. b)

Stosujemy kryterium Savage'a

Macierz gry

	A	B	C	D
I	21	15	32	16
II	28	20	10	20
III	13	27	25	15

Macierz strat

	A	B	C	D
I	7	12	0	4
II	0	7	22	0
III	15	0	7	5

- największe straty dla poszczególnych strategii: I – 12, II – 22, III – 15
- maksymalne straty otrzymano dla strategii II
- minimalne straty otrzymano dla strategii I

Wnioski i odpowiedzi

- stosując różnorakie kryteria strategie wyciągamy wniosek, że stosując strategię I rolnik może zebrać największe plony
- w tym przypadku wszystkie kryteria dają tę samą odpowiedź na pytanie, którą strategię zastosować
- największy przeciętny plon uzyskujemy z kryterium Bayesa – stosując strategię I uzyskuje się 21 z ha
- do minimalizacji strat wykorzystujemy kryterium Savage'a
- najmniejsza strata uzyskiwana jest poprzez zastosowanie strategii I. W tym przypadku straty będą kształtowały się na poziomie 12 z ha

PODSUMOWANIE

- Znając specyfikę poszczególnych kryteriów można je stosować zależnie od potrzeb
- kryterium Walda jest kryterium zachowawczym najbardziej pesymistycznym. Gracz decyduje się na najmniejszą możliwą wygraną przewidując najgorszy scenariusz wydarzeń
- kryterium Hurwicza nie posiada tej wady. Zależnie od współczynnika ostrożności można zagrać bardzo zachowawczo $\gamma = 1$ lub zagrać *va bank* $\gamma = 0$
- kryterium Bayesa uśrednia wygrane powodując, że gracz wybiera strategię gwarantującą mu przeciętną wygraną ze wszystkich możliwych
- kryterium Savage'a uwzględnia minimalizację strat powstałych przy podjęciu decyzji gorszej od najlepszej

Pytanie:

Do tej pory rozważaliśmy sytuację, że strategie gracza nierozumnego (natury) występowały jednakowo prawdopodobnie. Jak podjąć decyzję w przypadku, gdy strategie gracza nierozumnego występują z różnymi prawdopodobieństwami?

Rozwiązanie:

- Tylko kryterium Bayesa uwzględnia prawdopodobieństwa wystąpienia stanów natury
- Dla każdej strategii natury należy przyporządkować określone prawdopodobieństwo

$$\sum_i p_i = 1$$

- Wartość oczekiwaną (średnia) dla zmiennych losowych dyskretnych określany ze wzoru

$$E(x) = \sum_k x_k \cdot p(X = x_k)$$

Przykład 9.5.
Rozważmy przypadek z przykładu 9.4 z tym, że prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury są następujące: $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,2$, $p(C) = 0,05$, $p(D) = 0,05$

	A	B	C	D
I	21	15	32	16
II	28	20	10	20
III	13	27	25	15

$$E(I) = 21 \cdot 0,7 + 15 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 32 + 16 \cdot 0,05 = 20,1$$
$$E(II) = 28 \cdot 0,7 + 20 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,05 + 20 \cdot 0,05 = 25,1$$
$$E(III) = 13 \cdot 0,7 + 27 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,05 + 15 \cdot 0,05 = 16,5$$

$$\max\{E(I), E(II), E(III)\} = 25,1$$

Rolnik powinien wybrać strategię II, gdyż gwarantuje ona największą wygraną

INNE RODZAJE GIER

Gry dwuosobowe o sumie dowolnej

- Do rozwiązywanie tego typu gier najczęściej używa się drzew decyzyjnych
- Analizując wierzchołki drzewa decyzyjnego można określić zyski poszczególnych graczy
- Drzewo decyzyjne może zapisać w postaci bimacierzy (podwójnej macierzy)
- Rozwiązaniem gry będą strategie maksyminowe dla poszczególnych graczy

Gry koalicyjne

- Specyfika tych gier polega na tym, że do wykonanie pewnych działań potrzebna jest współpraca pewnej liczby graczy między sobą
- Metoda von Neumanna–Morgensterna – pojęcie dominacji
- Metoda Shapley'a – średnia wkładu każdego gracza do koalicji

Gry negocjacyjne

- W grach tego typu gracze negocjują o podziale zysków
- Etap pierwszy – wyznaczenie obszaru negocjacji
- Etap drugi – wyznaczeniu punktu "status quo"