

Badania Operacyjne

Laboratorium

Wprowadzenie do programowania liniowego. Metoda rozwiązań bazowych.

1. Dla następujących zadań programowania liniowego:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \min[-6x_1 - 2x_2] \\ & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \\ \text{b)} & \max[x_1 + 2x_2] \\ & \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

- sprawdzić je do postaci standardowej,
- wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe,
- określić zbiór rozwiązań dopuszczalnych i znaleźć rozwiązanie optymalne.

2. Metodą przeglądu rozwiązań bazowych znaleźć minimum funkcji

$$z = -3x_1 - 4x_2$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 5 \end{cases}$$

3. Wyznaczyć optymalne rozwiązanie bazowe dla problemu

$$\min[2x_1 + 3x_2]$$

przy ograniczeniach $x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \end{cases}$$

4. Firma produkuje dwa produkty A i B, których rynek zbytu jest nieograniczony. Każdy z produktów wymaga obróbki na każdej z maszyn I, II, III. Czasy obróbki (w godzinach) dla każdego z produktów są następujące:

	I	II	III
A	0.5	0.4	0.2
B	0.25	0.3	0.4

Tygodniowy czas pracy maszyn I, II, III wynosi odpowiednio 40, 36 i 36 godzin. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki A i B stanowi odpowiednio 5 i 3\$.

Określić tygodniowe normy produkcji wyrobów A i B maksymalizujące zysk.

5. Sprowadzić następujące zadanie:

$$\max[x_1 + 2x_2]$$

przy ograniczeniach $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \end{cases}$$

do postaci standardowej. Pokazać, że istnieje 15 rozwiązań bazowych, z których 5 jest dopuszczalnych. Przyporządkować te rozwiązania odpowiednim wierzchołkom zbioru punktów dopuszczalnych.

6. Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ma postać kanoniczną, jeżeli z macierzy \mathbf{A} można wybrać kolumny, z których daje się zbudować macierz jednostkową. Rozważmy układ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -19 \end{cases}$$

Za pomocą elementarnych operacji wierszowych sprowadzić go do postaci kanonicznej, a następnie wyznaczyć przynajmniej jedno rozwiązanie bazowe.

7. Firma postanowiła rozdzielić pewną kwotę z budżetu na trzyletni plan rozwojowy, tak żeby w kolejnych okresach nakłady nie malały. Ponadto kwota w pierwszym roku nie może być mniejsza niż czwarta część całego nakładu, a suma kwot z pierwszego i trzeciego roku nie może być wyższa od podwojonej kwoty z drugiego roku. W jaki sposób zaplanować rozdział inwestowanych środków, tak żeby średni przyrost względny (wyrażony w procentach) w całym okresie był możliwie największy?
8. Programista ma za zadanie zaprogramować generator losowy zwracający liczby całkowite od 1 do 5. Liczby parzyste muszą występować z prawdopodobieństwem dwukrotnie wyższym niż nieparzyste, a suma prawdopodobieństw dla każdej pary liczb o sumie 7 nie może być mniejsza od 0,1. Jakie prawdopodobieństwa dla każdej liczby powinien przypisać programista jeżeli zadaniem generatora jest
- maksymalizacja wartości oczekiwanej wyniku,
 - minimalizacja wariancji wyniku.
9. Uczestnik rajdu ma do pokonania kolejno cztery odcinki specjalne o długościach: 30, 40, 10 i 20 km. Z powodów ograniczeń technicznych i wytrzymałościowych samochodu, średnia prędkość osiągana na każdym odcinku nie może przekroczyć 180 km/h, a na każdym dwóch kolejnych odcinkach nie może przekroczyć 150 km/h. Jakie prędkości średnie na każdym odcinku powinien osiągać, żeby średnia prędkość na całej trasie była maksymalna?
10. Producent napojów bezalkoholowych dysponuje dwoma maszynami do rozlewania A i B. Maszyna A jest zaprojektowana dla butelek półlitrowych, a maszyna B — dla litrowych, jednak każda z nich może być wykorzystana do napełniania obu typów butelek, chociaż wiąże się to z pewną utratą efektywności, co przedstawia poniższa tabela:

Maszyna	Liczba butelek produkowanych w ciągu 1 min.	
	Butelki półlitrowe	Butelki litrowe
A	50	20
B	40	30

Każda z maszyn pracuje po 6 h dziennie przez 5 roboczych dni tygodnia. Zysk ze sprzedaży jednej butelki półlitrowej stanowi 4 centy, a od litrowej — 10 centów. Tygodniowa produkcja nie może przekroczyć 50 000 l. Rynek nie przyjmuje więcej niż 44 000 butelek półlitrowych i 30 000 litrowych. Producent chce zmaksymalizować swój zysk przy dostępnych środkach. Sformułować odpowiednie ZPL i rozwiązać.

11. Kompania naftowa kupuje ropę naftową ze źródeł W, X, Y i Z, a następnie zajmuje się jej przetworzeniem, produkując trzy rodzaje smarów A, B i C wg tabeli poniżej. Chłonność rynku dla każdego rodzaju smaru jest ograniczona:

Smar	Skład, %	Możliwa ilość do sprzedania [galony]
A	nie mniej niż 10 (W) nie więcej niż 25 (Z)	90 000
B	nie mniej niż 15 (W)	100 000
C	nie mniej niż 20 (X) nie więcej niż 50 (Y)	120 000

Ceny (w jednostkach umownych) za jeden galon surowca i gotowego produktu przedstawiono poniżej

Surowiec				Smar		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

Zakładając, że ropa jest dostępna w nieograniczonych ilościach, sformułować zadanie maksymalizacji zysku jako ZPL i znaleźć rozwiązanie optymalne.