

Badania Operacyjne

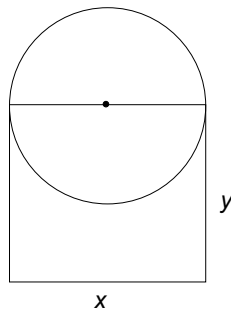
Laboratorium

Warunki optymalności dla zadań bez ograniczeń

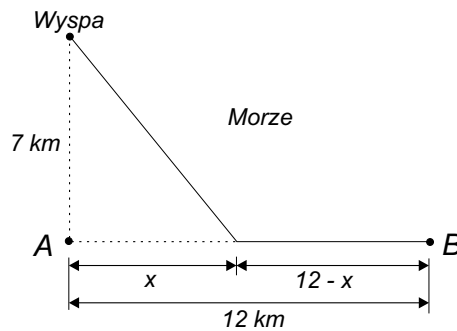
1. Określić punkty minimum i maksimum funkcji (a) $f(x) = x(x-1)^2$ oraz (b) $f(x) = x/(x^2+1)$.
2. Pokazać, że minimalną wartością funkcji $a \cos \theta + b \sin \theta$ jest $-\sqrt{a^2+b^2}$. Czy można ten rezultat otrzymać bez użycia pochodnych?
3. Stosując warunki optymalności pokazać, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{x} + x \geq 2.$$

4. Znaleźć minimum funkcji $e^{-x} - \cos x$.



Rys. 1. Okno z zadania 5.



Rys. 2. Rysunek do zadania 6.

5. Architekt ma zaprojektować okno o kształcie przedstawionym na Rys. 1 w taki sposób, że jego obwód wynosi 12 m, a powierzchnia jest maksymalna. Określić optymalne rozmiary okna.
6. Należy położyć kabel telefoniczny łączący wyspę z nadmorskim miastem B (Rys. 2). Linia łącząca punkty A i B odpowiada brzegowi morskiemu. Położenie 1 km kabla wzdłuż brzegu kosztuje 6000 PLN, a 1 km pod wodą 9000 PLN. Określić najtańszy sposób połączenia wyspy z miastem B.
7. Dana jest zmienna losowa X . Znaleźć liczbę a , dla której wartość oczekiwana zmiennej losowej $Y = |X-a|^2$ jest najmniejsza.
8. Zbadać punkty stacjonarne funkcji $f(x) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 23x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3$.
9. Określić zbiór punktów stacjonarnych funkcji

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \beta x_1 x_2 + x_1 + 2x_2$$

w zależności od parametru β . Które z nich są minimami globalnymi?

10. Znaleźć punkt płaszczyzny o równaniu

$$x + 2y + 2z = 4$$

najmniej oddalony od początku układu współrzędnych. Jaka jest ta odległość? Jak zmieni się rozwiązanie po zamianie powyższej płaszczyzny na płaszczyznę $x = 2$?

11. Firma produkuje dwa rodzaje lodów A i B. Koszt produkcji jednej sztuki A wynosi \$0.20, a jednej sztuki B \$0.25. Popyt na lody określają zależności

$$D_A(a, b) = \frac{10000}{a^2 b} \quad (\text{dla A}), \quad D_B(a, b) = \frac{50000}{ab^2} \quad (\text{dla B})$$

gdzie a jest ceną 1 szt. A oraz b jest ceną 1 szt. B. Określić cenę lodów maksymalizującą zysk firmy.

12. Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \quad B = bcd + cda + dab + abc.$$

Wykazać nierówność

$$(a + b + c + d)^3 \leq 4A + 24B.$$

13. **(Problem Fermata-Torricelli'ego-Vivianiego)** Mając dany trójkąt na płaszczyźnie, rozważyć zadanie określenia punktu, dla którego suma jego odległości od wierzchołków jest minimalna. Pokazać, że taki punkt jest albo wierzchołkiem trójkąta, albo punktem, z którego każdy bok trójkąta jest widziany pod kątem 120° .

14. Znaleźć wzór na sumę sześciątów liczb naturalnych od 1 do n

$$S(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3,$$

przy założeniu, że funkcja $S(n)$ należy do klasy wielomianów.

15. W czasie przyspieszania pewnego obiektu zmierzono jego prędkości w kolejnych chwilach czasu. Wyniki przedstawia tabela:

czas [s]	2	4	6	8	10
prędkość [m/s]	22	42	62	80	100

Wiedząc, że prędkość przy stałym przyspieszeniu a opisuje równanie $v = v_0 + at$, należy ocenić wartość a i prędkość początkową v_0 .