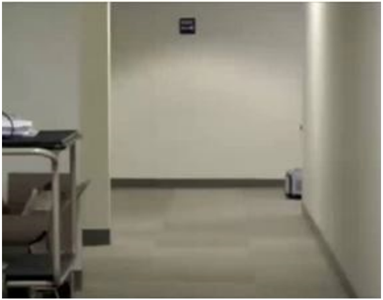
Kinematyka robotów mobilnych

Maciej Patan
Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych

Adaptacja slajdów do wykładu
Autonomous mobile robots R. Siegwart (ETH Zurich Master Course: 151-0854-00L)

Wstęp

- Charakterystyka robotów stacjonarnych i mobilnych
  - manipulator przymocowany jest do podłoża i zazwyczaj składa się z pojedynczego łańcucha elementów wykonawczych,
  - ruch robota mobilnego jest określony jest ograniczenia toczenia i poślizgu występujące w punktach styku z podłożem.



Opis ruchu

Kinematyka

- Etymologia od *kinein* (z greckiego) – poruszać się,
- dziedzina mechaniki zajmująca się ruchem ciał,
- w robotyce model ruchu robota oparty tylko na jego parametrach geometrycznych.

- Kinematyka manipulatora a robota mobilnego
  - obie związane są z kinematyką **prostą** (lokalizacja) i **odwrotną** (sterowanie, programowanie ruchu) ...,
  - ... ale dla robotów mobilnych:
    - wartości z enkoderów nie reprezentują jednoznacznie pozycji robota,
    - roboty mobilne mogą się poruszać w sposób nieograniczony w odniesieniu do ich środowiska,
    - nie ma **bezpośredniego** sposobu pomiaru pozycji robota
    - pozycja musi być **zintegrowana** w czasie i zależy od ścieżki wykonania
    - prowadzi to do niedokładności estymacji położenia i ruchu.
  - kluczem do zrozumienia ruchu kołowego robota mobilnego jest zrozumienie ograniczeń związanych z kołami napędzającymi robota.

Opis ruchu

Kinematyka

- Etymologia od *kinein* (z greckiego) – poruszać się,
- dziedzina mechaniki zajmująca się ruchem ciał,
- w robotyce model ruchu robota oparty tylko na jego parametrach geometrycznych.

- Kinematyka manipulatora a robota mobilnego
  - obie związane są z kinematyką **prostą** (lokalizacja) i **odwrotną** (sterowanie, programowanie ruchu) ...,
  - ... ale dla robotów mobilnych:
    - wartości z enkoderów nie reprezentują jednoznacznie pozycji robota,
    - roboty mobilne mogą się poruszać w sposób nieograniczony w odniesieniu do ich środowiska,
    - nie ma **bezpośredniego** sposobu pomiaru pozycji robota
    - pozycja musi być **zintegrowana** w czasie i zależy od ścieżki wykonania
    - prowadzi to do niedokładności estymacji położenia i ruchu.
  - kluczem do zrozumienia ruchu kołowego robota mobilnego jest zrozumienie ograniczeń związanych z kołami napędzającymi robota.

Opis ruchu

Kinematyka

- Etymologia od *kinein* (z greckiego) – poruszać się,
- dziedzina mechaniki zajmująca się ruchem ciał,
- w robotyce model ruchu robota oparty tylko na jego parametrach geometrycznych.

- Kinematyka manipulatora a robota mobilnego
  - obie związane są z kinematyką **prostą** (lokalizacja) i **odwrotną** (sterowanie, programowanie ruchu) ...,
  - ... ale dla robotów mobilnych:
    - wartości z enkoderów nie reprezentują jednoznacznie pozycji robota,
    - roboty mobilne mogą się poruszać w sposób nieograniczony w odniesieniu do ich środowiska,
    - nie ma **bezpośredniego** sposobu pomiaru pozycji robota
    - pozycja musi być **zintegrowana** w czasie i zależy od ścieżki wykonania
    - prowadzi to do niedokładności estymacji położenia i ruchu.
  - kluczem do zrozumienia ruchu kołowego robota mobilnego jest zrozumienie ograniczeń związanych z kołami napędzającymi robota.

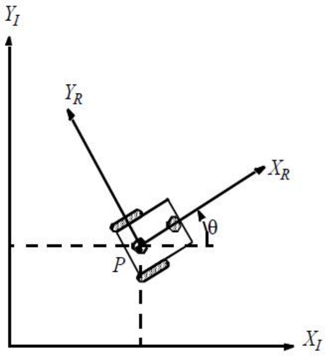
Poza robota (Konfiguracja)

- Ramka globalna (inercyjna) X_I, Y_I,
- Ramka lokalna (robota) X_R, Y_R,
- Poza robota: $\boxed{\xi_I = [x, y, \theta]^\mathsf{T}}$
- Transformacja między ramkami:

$$\xi_R = R(\theta) \cdot \xi_I$$

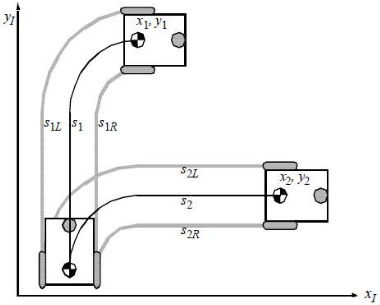
gdzie:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Układy nieholonomiczne

- ruch opisany równaniami różniczkowymi, które nie redukują się przez całkowanie do pozycji końcowej,
- pomiar odległości przebytej przez koła **nie wystarcza** do obliczenia ostatecznej pozycji robota
- jest to fundamentalna różnica w stosunku do robotów stacjonarnych (manipulatorów)



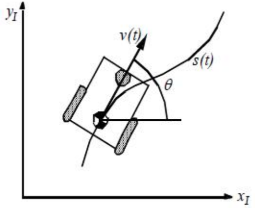
$$s_1 = s_2, s_{1R} = s_{2R}, s_{1L} = s_{2L},$$
$$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$$

Układy nieholonomiczne (c.d.)

- Robot poruszający się wzdłuż trajektorii $s(t)$ ma prędkość:

$$v(t) = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial y}{\partial t}\sin\theta$$

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\cos\theta + \mathrm{d}y\sin\theta$$



- Ograniczenia na prędkość $v(t)$ nazwiemy **holonomicznymi** jeżeli $s(t)$ można wyrazić funkcją zależną tylko od współrzędnych konfiguracyjnych x, y, θ.

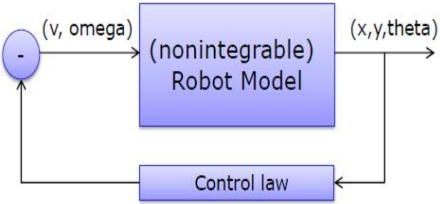
$$s(t) = s(x(t), y(t), \theta(t)).$$

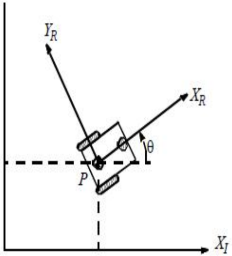
- To jest możliwe wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x};\quad \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial^2 s}{\partial \theta \partial x};\quad \frac{\partial^2 s}{\partial \theta \partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial \theta}}$$

Kinematyka prosta i odwrotna

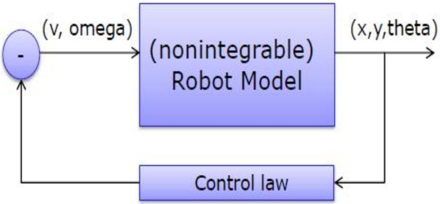
- Kinematyka prosta
  - transformacja z przestrzeni konfiguracyjnej do roboczej (fizycznej),
- Kinematyka odwrotna
  - przekształcenie z przestrzeni roboczej (fizycznej) do konfiguracyjnej,
  - niezbędna do sterowania.
- Nieholonomiczne ograniczenia ruchu w robotyce mobilnej prowadzą do kinematyki **różniczkowej**
  - transformacja między prędkościami

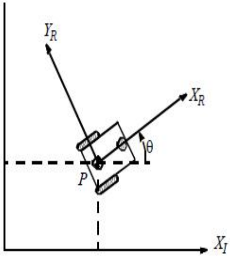




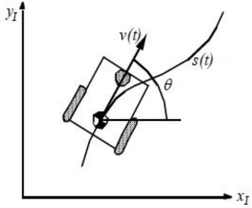
Kinematyka prosta i odwrotna

- Kinematyka prosta
  - transformacja z przestrzeni konfiguracyjnej do roboczej (fizycznej),
- Kinematyka odwrotna
  - przekształcenie z przestrzeni roboczej (fizycznej) do konfiguracyjnej,
  - niezbędna do sterowania.
- Nieholonomiczne ograniczenia ruchu w robotyce mobilnej prowadzą do kinematyki **różniczkowej**
  - transformacja między prędkościami





Kinematyka różniczkowa



- wyznaczenie prędkości robota $\dot{\xi} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^{\mathsf{T}}$ jako funkcji prędkości kół $\dot{\phi}_i$, kątów skrętu β_i, prędkości skrętu $\dot{\beta}_i$ oraz parametrów geometrycznych robota.
- Kinematyka prosta:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = f(\dot{\phi}, \beta, \dot{\beta})$$

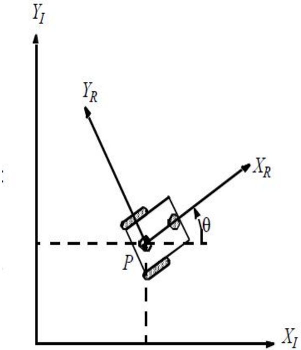
- Kinematyka odwrotna:

$$[\dot{\phi}, \beta, \dot{\beta}]^{\mathsf{T}} = g(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

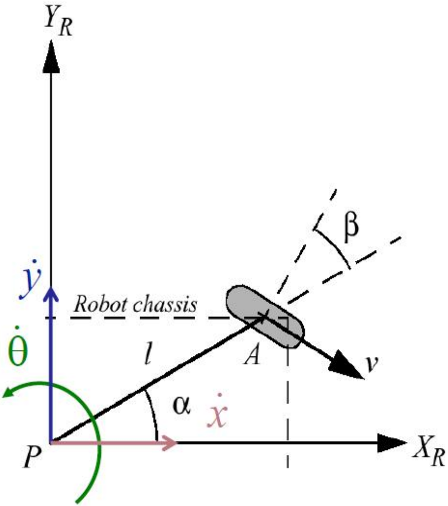
- W ogólności nie da się sprowadzić do $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = f(\phi, \beta)$

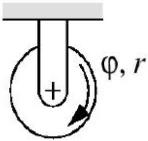
Więzy kinematyczne kół

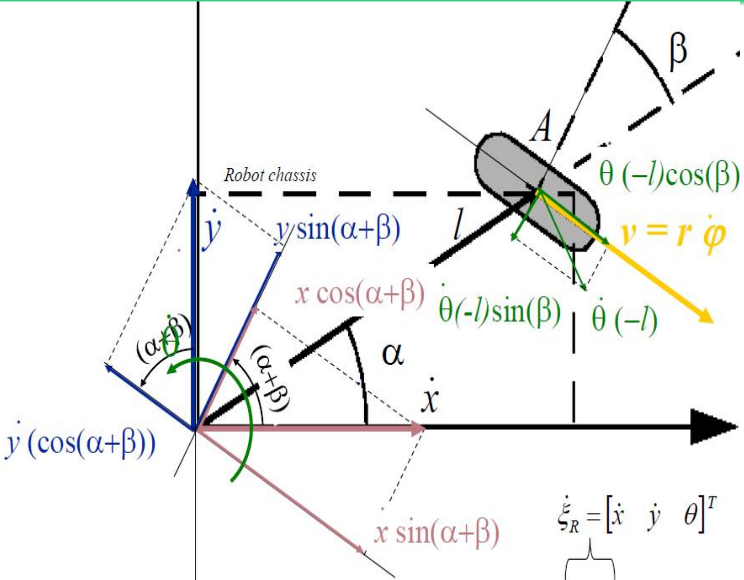
- Kluczowe założenia:
  - ruch na płaszczyźnie poziomej,
  - kontakt punktowy koła,
  - koła nieodkształcają się w trakcie ruchu,
  - czyste toczenie ($v_c = 0$),
  - brak poślizgu,
  - brak tarcia w obrocie dokoła punktu kontaktowego,
  - osie skrętu prostopadłe do powierzchni,
  - koła osadzone na sztywnej ramie.



Więzy kinematyczne: nieskrętne koło standardowe







$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \theta\end{bmatrix}^T$$

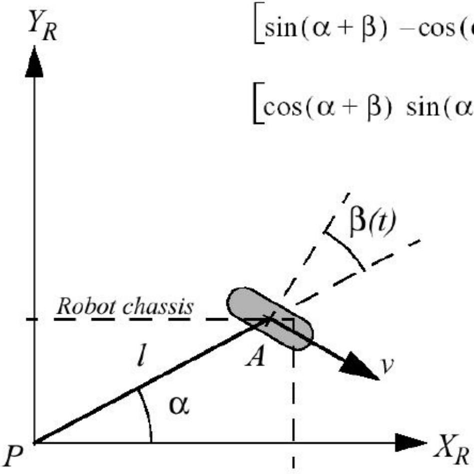
$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos\beta\end{bmatrix} \underbrace{R(\theta)\dot{\xi}_I}_{\dot{\xi}_R} - r\dot{\varphi} = 0$$

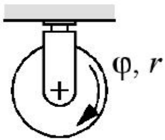
$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

Więzy kinematyczne: skrętne koło standardowe

$$\left[\sin(\alpha+\beta)\ \ -\cos(\alpha+\beta)\ \ (-l)\cos\beta\right] R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

$$\left[\cos(\alpha+\beta)\ \ \sin(\alpha+\beta)\ \ l\sin\beta\right] R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

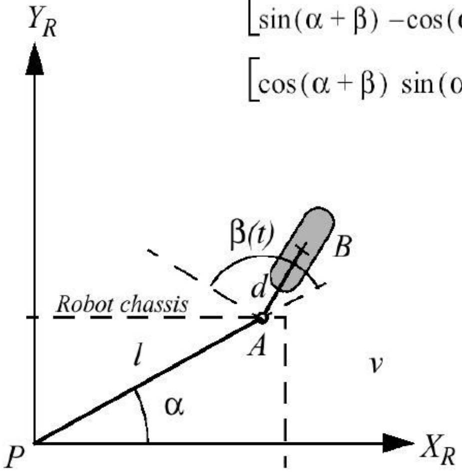


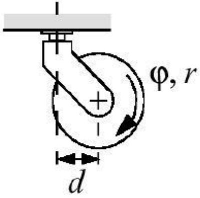


Więzy kinematyczne: koło samonastawne

$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & \underline{d+l}\sin\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I + \underline{d}\dot{\beta} = 0$$

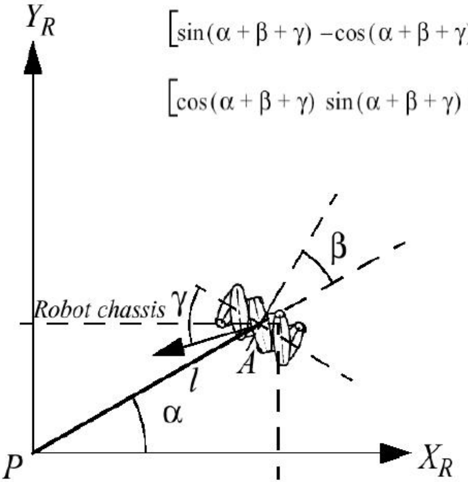


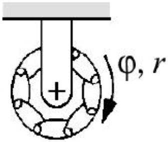


Więzy kinematyczne: koło szwedzkie

$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta+\gamma) & -\cos(\alpha+\beta+\gamma) & (-l)\cos(\beta+\gamma)\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi}\cos\gamma = 0$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta+\gamma) & \sin(\alpha+\beta+\gamma) & l\sin(\beta+\gamma)\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi}\sin\gamma - r_{sw}\dot{\varphi}_{sw} = 0$$

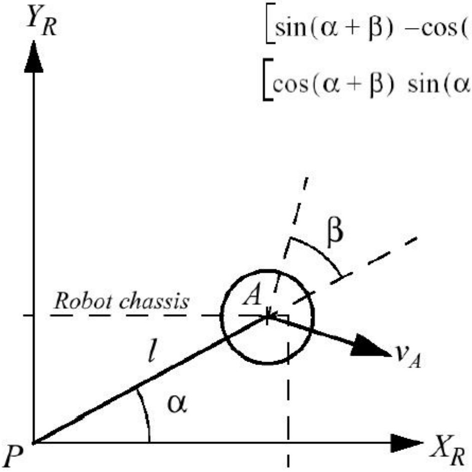


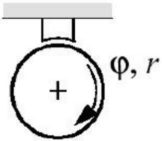


Więzy kinematyczne: koło sferyczne

$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$





- Rotational axis of the wheel can have an arbitrary direction

Więzy kinematyczne robota kołowego

- koła samonastawne, szwedzkie oraz sferyczne nie wprowadzają ograniczeń (więzów) kinematycznych na ruch korpusu robota,
- **tylko** koła standardowe: nieskrętne (ang. fixed) oraz skrętne (ang. steering) wprowadzają ograniczenia do kinematyki kołowego robota mobilnego.

Rozważmy robota N kołowego, w tym N_f kół nieskrętnych oraz N_s skrętnych. Oznaczając odpowiednio kąty obrotu oraz skrętu tych kół jako $\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_f(t) & \varphi_s(t)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ oraz $\beta = \begin{bmatrix}\beta_f & \beta_s(t)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, można zapisać ograniczenia ruchu robota bez poślizgu:

- wzdłużnego:
$$A(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_I + B\dot{\varphi} = 0,$$
- bocznego:
$$C(\beta)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0,$$

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} A_f \\ A_s(t) \end{bmatrix}, \quad B = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_N), \quad C(\beta) = \begin{bmatrix} C_f \\ C_s(t) \end{bmatrix}.$$