

Podstawy Systemów Dyskretnych – Ćwiczenia<sup>1</sup>  
Informatyka<sup>2</sup> – stopień pierwszy – tytuł inżyniera – Semestr II rok I  
**Zbiór zadań**

## 1 Zbiory

1. Podać formalne definicje: sumy zbiorów i różnicy zbiorów dwóch zbiorów, iloczynu dwóch zbiorów, różnicy symetrycznej dwóch zbiorów.
2. Wypisać kilka przykładowych (np.: po pięć) wartości następujących zbiorów:
  - (a)  $\mathbb{N}, \mathbb{P}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
  - (b)  $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ oraz } n \text{ jest parzyste}\}$
  - (c)  $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$
  - (d)  $\{n \in \mathbb{N} : \text{liczba } n + 1 \text{ jest pierwsza}\}$
  - (e)  $\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{P}, \text{ liczba } n \text{ jest parzysta i } n < 11\}$
  - (f)  $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 9\}$
  - (g)  $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9\}$
  - (h)  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$
  - (i)  $\Sigma = \{a, b\}, \Sigma = \{0, 1\}, \Sigma = \{0, 1, 2\}, \Sigma = \{z\}$
3. Niech  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 5\}$  oraz  $B = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x < 0\}$  przedstawić graficznie następujące zbiory:
  - (a)  $A \cup B, A \cap B, A^c$
  - (b)  $A \setminus B, B \setminus A$
4. Podaj moc następujących zbiorów:
  - (a)  $\{-1, 1\}, [-1, 1], \langle -1, 1 \rangle, (1, 1)$
  - (b)  $\{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n \leq 2\}$
  - (c)  $\{n \in \mathbb{Z} : 10 \leq |x| \leq 30\}$
  - (d)  $\{n \in \mathbb{Z} : 10 < x < 30\}$

---

<sup>1</sup>by M.S. luty, marzec, kwiecień, maj roku pańskiego 2005 oraz luty, marzec 2006, luty 2007, marzec 2010, luty 2019, opracowane min. na podstawie książki Matematyka Dyskretna, Kenneth A.Ross, Charles R.B.Wright, Wydawnictwa Naukowe PWN, wydanie trzecie, Warszawa 2000

<sup>2</sup>Zbiór zadań dotyczy kierunku informatyki w trybie stacjonarnym (studia dzienne) oraz w trybie niestacjonarnym (studia zaoczne).

- (e)  $\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$
- (f)  $\{n \in \mathbb{N} : \text{liczba } n \text{ jest parzysta i pierwsza}\}$
- (g)  $\{n \in \mathbb{N} : \text{liczba } n \text{ jest parzysta lub pierwsza}\}$
- (h)  $\Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- (i)  $\Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$  oraz  $\text{dugo}(w) < 3$

5. Załóżmy, że mamy słowo  $w$  należące do zbioru  $\Sigma^*$  pewnego alfabetu:

- (a) Jeśli usuniemy pierwszą (od lewej strony) bądź ostatnią (od prawej strony) literę ze słowa  $w$ , to czy nowo otrzymane słowo będzie należeć do  $\Sigma^*$ ?
- (b) A gdy usuniemy obydwie litery z obu końców? To czy słowo nadal będzie należeć do zbioru  $\Sigma^*$ ?
- (c) Załóżmy że mamy maszynę która potrafi rozpoznawać litery należące do alfabetu  $\Sigma$  oraz usuwać rozpoznane litery. Czy możemy wykorzystać taką maszynę aby rozstrzygnąć czy słowo  $w$  należy do zbioru  $\Sigma^*$ ?

6. Mamy następujące zbiory:  $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ ,  $C = \{2, 3, 6, 12\}$ ,  $D = \{2, 4, 8\}$  i przestrzeń w której zawarte są wymienione zbiory  $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$ . Wyznaczyć:

- (a)  $A \cup B, A \cap B$
- (b)  $(A \cup B) \cap C^c$
- (c)  $A \setminus B, C \setminus D$
- (d)  $B \oplus C, A \oplus B$

7. Mamy dwa zbiory:  $A = \{a, b, c\}$  oraz  $B = \{a, b, d\}$

- (a) wypisać (i narysować) wszystkie pary uporządkowane ze zbioru  $A \times A$
- (b) wypisać (i narysować) wszystkie pary uporządkowane ze zbioru  $A \times B$
- (c) wypisać (i narysować) elementy zbioru:  $\{(x, y) \in A \times B : x = y\}$

8. Niech  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  oraz  $T = \{0, 2, 4\}$

- (a) podać moc zbiorów  $|S \times T|, |T \times S|$
- (b) wypisać i narysować elementy następujących zbiorów:
  - i.  $\{(m, n) \in S \times T : m < n\}$
  - ii.  $\{(m, n) \in T \times S : m < n\}$
  - iii.  $\{(m, n) \in S \times T : m + n \geq 3\}$
  - iv.  $\{(m, n) \in T \times S : mn \geq 4\}$
  - v.  $\{(m, n) \in S \times S : m + n = 10\}$

9. Narysować diagramy Venna dla następujących operacji:

- (a) sumy zbiorów i różnicy zbiorów dwóch zbiorów, iloczynu dwóch zbiorów, różnicy symetrycznej dwóch zbiorów

(b)  $A \cap (B \cup C), (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10. Za pomocą diagramów Venna udowodnić zależności:

(a)  $(A \cup B) \cap A^c \subseteq B$

(b)  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(c)  $A \oplus B \subseteq (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$

11. Udowodnić formalnie następujące zdania:

(a) dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  mamy  $A \cap B \subseteq A$  i  $A \subseteq A \cup B$

(b) jeśli  $A \subseteq B$  i  $A \subseteq C$  to  $A \subseteq B \cap C$

(c) jeśli  $A \subseteq C$  i  $B \subseteq C$  to  $A \cup B \subseteq C$

(d)  $A \subseteq B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $B^c \subseteq A^c$

(e)  $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ , dla dowolnych zbiorów

12. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów  $A, B, C$  zachodzą następujące równości:

(a)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(b)  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

(c)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

(d)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

13. Obliczyć następujące ułamki oraz wyrażenia:

(a)  $\frac{7!}{5!}, \frac{10!}{6!4!}, \frac{9!}{0!9!}, \frac{8!}{4!}, \sum_{k=0}^5 k!$

(b)  $n!, (n+1)!, \frac{n!}{(n-1)!}, \frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!}, \sum_{i=1}^{10} (-1)^i, \prod_{j=4}^8 (j-1)$

(c) wyznaczyć sześć pierwszych wyrazów ciągu  $a_n = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{P}$  oraz

- obliczyć  $a_{n+1} - a_n$  dla  $n = 1, 2, 3$
- wykazać, że  $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

14. Dla każdego z poniższych ciągów wyznaczyć  $k$  taką, że  $f(n) = O(n^k)$ .

(a)  $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

(b)  $f(n) = (n^2 + 1)(2n^4 + 3n - 8)$

(c)  $f(n) = (n^2 - 1)^7$

(d)  $\sqrt{n+1}$

(e)  $\sqrt{n^2 + n}$

15. Wyznaczyć ograniczenia dla następujących ciągów:

(a)  $(3n^4 + O(n)) + (2n^3 + O(n))$

(b)  $(3n^4 + O(n)) \cdot (2n^3 + O(n))$

$$(c) (5n^3 + O(n^2)) \cdot (3n^4 + O(n^3))$$

$$(d) (5n^3 + O(n)) \cdot (3n^4 + O(n^2))$$

16. Wykazać bez użycia indukcji prawdziwość nierówności:

$$(a) n \leq 2^n$$

$$(b) n! < n^n$$

$$(c) 2^n < n! < n^n \text{ dla } n \geq 4$$

$$(d) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \log_2 n \text{ dla } n \geq 1$$

$$(e) n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n} \leq n \log_2 n \text{ dla } n \geq 1$$

## 2 Logika I

1. Zmienne  $p, q, r$  są następującymi zdaniami:

- $p$  = „pada deszcz”
- $q$  = „słońce świeci”
- $r$  = „na niebie są chmury”

Zapisać poniższe zdania za pomocą symboli logicznych:

- Padają deszcz i świeci słońce.
- Jeśli pada deszcz, to na niebie są chmury.
- Jeśli nie pada deszcz, to nie świeci słońce i na niebie są chmury.
- Słońce świeci wtedy i tylko wtedy, gdy nie pada deszcz.
- Jeśli nie ma chmur na niebie, to świeci słońce.

Zakładamy, że  $p, q, r$  mają nadal to samo znaczenie co podane powyżej. Przetłumaczyć na poniższe wyrażenia na język polski:

$$(a) (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$(b) (p \rightarrow r) \rightarrow q$$

$$(c) \neg p \leftrightarrow (q \vee r)$$

$$(d) \neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$$

$$(e) \neg(p \vee q) \wedge r$$

2. Jak należy rozumieć następujące zdania:

- Nie wolno pić i grać w karty.
- Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.
- Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.
- Przepis dotyczy osób, które są obywatelami polskimi i stale zamieszkujących w Polsce.

(e) Jeśli pozwany nie stawi się lub nie przyśle przedstawiciela, to wyrok będzie wydany zaocznie

(f) Jeśli nie przyjdiesz lub nie zadzwonisz, to się nie dowiesz.

3. Podać zdania odwrotne do następujących zdań:

(a)  $q \rightarrow r$

(b) Jeśli jestem bystry, to zdam egzamin.

(c) Jeśli  $x^2 = x$ , to  $x = 0$  lub  $x = 1$ .

(d) Jeśli  $2 + 2 = 4$ , to  $2 + 4 = 8$

4. Podać kontrprzykłady na następujące stwierdzenia:

(a)  $2^n - 1$  jest liczbą pierwszą dla każdego  $n \geq 2$ .

(b)  $2^n + 3^n$  jest liczbą pierwszą  $\forall n \in \mathbb{N}$

(c)  $2^n + n$  jest liczbą pierwszą dla każdej nieparzystej liczby dodatniej  $n$ .

5. Mamy taki oto dialog:

Mama pyta małą Kasię:

– Nie chcesz zupki?

– Nie!

Czy Kasia chciała zupki?

6. Mama powiedziała wieczorem do Kasi:

– Jeśli nie dokończysz kolacji, nie będziesz mogła oglądać dłużej telewizji dziś wieczorem.

Kasia owszem zjadła kolację jednak po tym fakcie została natychmiast wysłana do łóżka.

Czy Mama postąpiła sprawiedliwie?

7. Zbudować macierz logiczną (tabelę prawdy) dla zdań:

(a)  $\neg(p \wedge q)$

(b)  $\neg((p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg q \wedge p)$

(c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(d)  $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

8. Sprawdzić czy podane poniżej zdania są tautologiami:

(a)  $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$

(b)  $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$

(c)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$

(d)  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(e)  $((p \rightarrow q) \vee r) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

(f)  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

(g)  $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

(h)  $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg p \rightarrow \neg q$

- (i)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$
- (j)  $p \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- (k)  $q \vee r \rightarrow (p \vee q \rightarrow q \vee r)$

9. Udowodnić, że:

- (a) iloczyn dwóch liczb parzystych jest wielokrotnością 4
- (b) liczba  $\sqrt{3}$  jest niewymierna
- (c) udowodnić, że liczba  $n^2 - 2$  nigdy nie jest podzielna przez 3 dla  $n \in \mathbb{N}$

10. Podać po jednym przykładzie (zdania w języku polskim) dla następujących prostych reguł wnioskowania:

(a)  $\frac{p}{q}$

$p$

(b)  $\frac{q}{r}$

$p$

(c)  $\frac{\frac{q}{(p \wedge q) \rightarrow r}}{p \rightarrow q}$

$p \rightarrow q$

(d)  $\frac{\neg q}{\neg p}$

### 3 Relacje

1. Niech  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  i niech  $T = \{0, 2, 4\}$ , wypisać elementy jeśli relacja została określona w następujący sposób:

- (a)  $\{(m, n) \in S \times T : m < n\}$
- (b)  $\{(m, n) \in T \times S : m < n\}$
- (c)  $\{(m, n) \in S \times T : m - n \geq 3\}$
- (d)  $\{(m, n) \in T \times S : mn \geq 4\}$
- (e)  $\{(m, n) \in S \times S : m - n = 8\}$

2. Niech  $A = \{a, b, c, d\}$ . Wiemy, że  $R \subseteq A^2$  i  $R = \{(a, a), (a, b), (c, a), (b, a), (a, d)\}$  oraz  $S \subseteq A^2$ ,  $S = \{(a, c), (d, a), (b, d), (d, c)\}$ . Wyznaczyć złożenie  $R$  i  $S$  oraz  $S$  i  $R$ .

3. Narysować digrafy poniższych relacji:

- (a)  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\{(m, n) \in A^2 : m \leq n\}$
- (b)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{(m, n) \in A^2 : m - n \text{ jest liczb parzyst}\}$
- (c) relacja odwrotna do relacji 3a
- (d) relacja odwrotna do relacji 3b

4. Udowodnić, że:

- (a)  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- (b)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- (c)  $(R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

5. Wiemy, że dowolna relacja  $R$  może być:

- zwrotna, przeciwwzrotna
- symetryczna, antysymetryczna
- przechodnia.

Podać definicję każdej własności dowolnej relacji  $R$ .

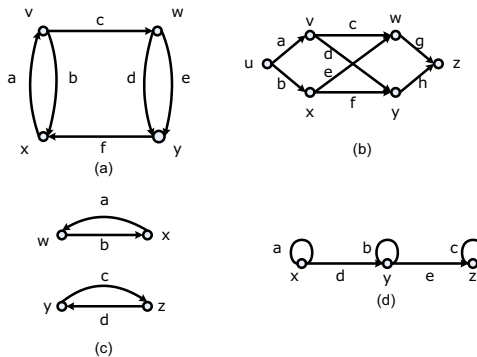
6. Mamy zbiór  $A = \{0, 1, 2\}$  i relację  $R \subseteq A^2$ . Zapisać każdą z podanych relacji jako zbiór par uporządkowanych oraz podać jakie własności mają poniższej relacje:

- (a)  $mRn \Leftrightarrow m < n$
- (b)  $mRn \Leftrightarrow mn = 0$
- (c)  $mRn \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 2$
- (d)  $mRn \Leftrightarrow m = n$
- (e)  $mRn \Leftrightarrow m + n \in A$

7. Sprawdzić jakie własności mają poniższe relacje:

- (a)  $\rho \subseteq R^2, x\rho y \Leftrightarrow x + y = 1$
- (b)  $\rho \subseteq Z^2, x\rho y \Leftrightarrow 3|x - y$
- (c)  $\rho \subseteq (Z - 0)^2, x\rho y \Leftrightarrow x|y$
- (d)  $\rho \subseteq R^2, x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
- (e)  $\rho \subseteq R^2, x\rho y \Leftrightarrow |x| < |y|$
- (f)  $A, \rho \subseteq (\mathcal{P}(A))^2, X\rho Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$

8. Podać tabelę funkcji  $\gamma$  dla każdego z grafów skierowanych z poniższych rysunków:

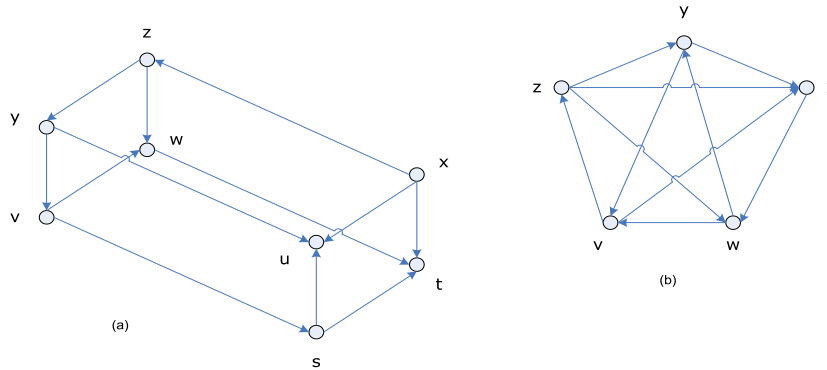


9. Wykonać rysunek grafu skierowanego  $G$ , gdzie:  $V(G) = \{w, x, y, z\}$  i  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  natomiast funkcja  $\gamma$  jest określona przez następujące dane:

$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$\gamma(e)$	$(x, w)$	$(w, x)$	$(x, x)$	$(w, z)$	$(w, y)$	$(w, z)$	$(z, y)$

10. Które z podanych ciągów wierzchołków opisują drogi w grafie skierowanym przedstawiony na poniższym rysunku:

- (a) zyvwt
- (b) xzwt
- (c) vstx
- (d) zysu
- (e) xzyvs
- (f) suxt

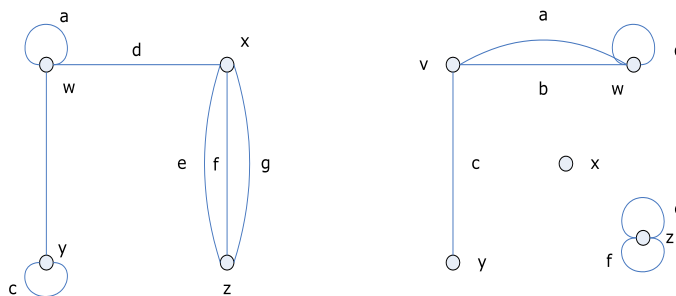


W grafie (a) podać najkrótszą drogę z  $x$  do  $w$ .

11. Są cztery grupy krwi A, B, AB i 0. Grupa 0 może być podawana każdemu, grupy A i B mogą być podawane osobom mającym grupę AB lub A lub B odpowiednio, a grupa AB może być podawana tylko osobom z grupą AB. Narysuj graf skierowany, które przedstawia te informacje. Czy ten graf jest acykliczny?
12. Które z następujących ciągów wierzchołków odpowiadają drogom w grafie (a) z poniższego rysunku:

- (a) zxw
- (b) wxzxwyww
- (c) wwxxz
- (d) wxzz
- (e) zxwyywz
- (f) wxw
- (g) yyww





Ile jest pętli w każdym z grafów na rysunkach (a) oraz (b). Podać też przykłady następujących dróg dla grafu (a):

- (a) o długości 2 od w do z
- (b) o długości 4 od z do z
- (c) o długości 5 od z do z
- (d) o długości 3 od w do x

Jak również przykłady następujących dróg dla grafu (b):

- (a) o długości 3 od y do w
- (b) o długości 3 od v do y
- (c) o długości 4 od v do y
- (d) o długości 3 od z do z

13. Mamy następujące macierze:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć macierze jeśli będzie to możliwe:

- (a)  $A^T, C^T$
- (b)  $A + B, A + C$
- (c)  $(A + B)^T$
- (d)  $A^T + B^T$
- (e)  $B + B^T, C + C^T$
- (f)  $(A + A) + B$

14. Niech  $A$  i  $B$  oznaczają dowolne macierze. Czy prawdziwe są następujące zdania:

- (a)  $(A^T)^T = A$ , dla wszystkich  $A$
- (b) jeśli  $A^T = B^T$ , to  $A = B$
- (c) jeśli  $A = A^T$ , to  $A$  jest macierzą kwadratową
- (d) jeśli  $A$  i  $B$  są macierzami tego samego wymiaru, to  $(A + B)^T = A^T + B^T$

15. Dla każdej liczby  $n \in \mathbb{N}$  niech:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } B_n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Wyznaczyć macierze  $A_n^T$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Wyznaczyć zbiór  $\{n \in \mathbb{N} : A_n^T = A_n\}$
- (c) Wyznaczyć zbiór  $\{n \in \mathbb{N} : B_n^T = B_n\}$
- (d) Wyznaczyć zbiór  $\{n \in \mathbb{N} : B_n = B_0\}$

16. Weźmy macierze  $A, B \in \mathfrak{M}_{m,n}$  oraz  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Wykaż, że:

- (a)  $c(aA + bB) = (ca)A + (cb)B$
- (b)  $-aA = (-a)A = a(-A)$
- (c)  $(aA)^T = aA^T$

17. Mamy następujące macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć następujące macierze, o ile one istnieją:

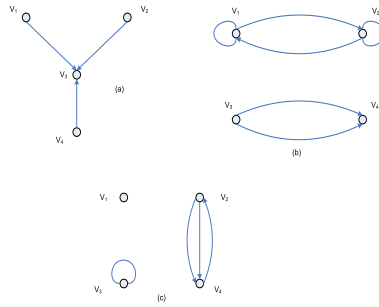
- (a)  $AB, BA, ABA$
- (b)  $A + B^T, 3A^T - 2B$
- (c)  $(AB)^2$
- (d)  $AC, BC, C^2$
- (e)  $C^T C, CC^T$
- (f)  $73C$

18. Niech macierze A,B,C będą określone w następujący sposób:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a)  $(AB)C, A(BC)$
- (b)  $B(AC), (BA)C$
- (c)  $AB, BA$
- (d)  $AC, CA$
- (e)  $A^2$

19. Wyznacz macierze grafów skierowanych przedstawianych na poniższym rysunku:



20. Dla każdej z poniższych macierzy narysować graf skierowany mający taką macierz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Dla każdej z poniższych macierzy narysować graf nieskierowany mający taką macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Narysować też graf skierowany na podstawie drugiej macierzy.

22. Pokazać, że następująca macierz:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

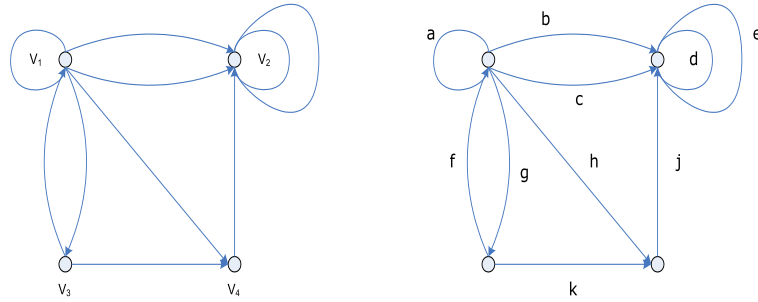
powstała z macierzy M którą określimy w następujący sposób:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graf który jest opisany macierzą M prezentuje się następująco:

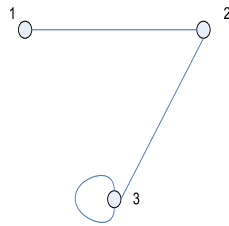
Znaleźć liczbę dróg o długości 2:

- (a) z wierzchołka  $v_1$  do niego samego
- (b) z wierzchołka  $v_2$  do wierzchołka  $v_3$
- (c) z wierzchołka  $v_1$  do wierzchołka  $v_4$
- (d) z wierzchołka  $v_2$  do wierzchołka  $v_1$



Znaleźć liczbę dróg o długości 3 z wierzchołka  $v_3$  do wierzchołka  $v_2$ . Wypisać te drogi korzystając z oznaczeń na powyższym rysunku.

23. Jakie warunki relacja musi spełnić aby nazywać ją relacją równoważności?
24. Sprawdzić czy poniższe relacje są relacjami równoważności:
- (a) relacja  $l_1 \parallel l_2$  określona w zbiorze linii prostych na płaszczyźnie, oznaczająca, że proste  $l_1$  i  $l_2$  są równoległe
  - (b)  $x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$
  - (c) relacja  $p_1 \approx p_2$  określona na zbiorze Polaków, oznaczająca, że osoby  $p_1$  i  $p_2$  mieszkają w tym samym województwie
  - (d) relacja  $p_1 \approx p_2$  określona w zbiorze wszystkich ludzi, oznaczająca, że osoby  $p_1$  i  $p_2$  mają wspólnego rodzica
25. Niech  $\Sigma$  będzie alfabetem oraz  $w_1$  i  $w_2$  w zbiorze  $\Sigma^*$  określamy:  $w_1 \approx w_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $d(w_1) = d(w_2)$ . Czy jest to relacja równoważności i jeśli tak to podać jej klasy równoważności.
26. Mówimy że grafy  $G$  i  $H$  są izomorficzne jeśli istnieje taki sposób przenumerowania wierzchołków  $G$  aby stał się on grafem  $H$ . Podać trzy przykłady izomorficznych grafów do zaprezentowanego grafu poniżej:



27. Istnieje funkcja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Czy funkcja  $f$  określa relację równoważności  $\approx$  tzn:  $(x, y) \approx (z, w)$  jeśli  $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ . Co jest klasami równoważności takiej relacji?

### Dodatkowe uzupełniające zadania z relacji

28. Wyznaczyć dziedziny następujących relacji  $R$ :

- (a)  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- (b)  $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\}$
- (c)  $R = \{\langle a, b, c \rangle, \langle a, c, b \rangle, \langle a, d, b \rangle\}$
- (d)  $R(a, b) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge a < b)$
- (e)  $R(a, b, c) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{Z} \wedge a^2 + b^2 < 10 - c^2)$
- (f)  $R(a, b, c) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{N} \wedge \forall_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} \frac{ab}{x} = c + 1)$

29. Jakie własności posiadają następujące relacje:

- (a)  $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle\}$
- (b)  $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$
- (c)  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, d \rangle\}$
- (d)  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

30. Wyznaczyć domknięcie przechodnie  $R^+$  oraz domknięcie zwrotne i przechodnie  $R^*$  następujących relacji  $R$ :

- (a)  $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}, S = \{1, 2, 3\}$
- (b)  $R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4)\}, S = \{1, 2, 3, 4\}$
- (c)  $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (d)  $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 2), (2, 3)\}, S = \{1, 2, 3\}$

31. Narysować diagramy relacji (digraf relacji):

- (a)  $R \subset A^2$  oraz  $A = \{0, 1, 2\}, xpy \Leftrightarrow x < y$
- (b)  $R \subset A^2$  oraz  $A = \{1, 2, \dots, 10\}, xpy \Leftrightarrow x|_y \wedge x \neq y$
- (c)  $R \subset A^2$  oraz  $A = \{1, 2, 3, 4\}, xpy \Leftrightarrow 2|_{x+y}$

32. Podać jakie właściwości ma digraf relacji:

- (a) symetrycznej,
- (b) antysymetrycznej,
- (c) antysymetrycznej i spójnej,
- (d) a dokładnie punkt odpowiadający elementowi minimalnemu relacji porządku,
- (e) a dokładnie punkt odpowiadający elementowi maksymalnemu relacji porządku,
- (f) a dokładnie punkt odpowiadający elementowi najmniejszemu relacji porządku,
- (g) a dokładnie punkt odpowiadający elementowi największemu relacji porządku.

33. Udowodnić, że:

- (a) na to aby relacja  $R$  była zwrotna, potrzeba i wystarcza, by  $I_{D(R) \cup D^*(R)} \subset R$ ,
- (b) i analogicznie na to aby relacja  $R$  była przeciwzwrotna, potrzeba i wystarcza, by  $I_{D(R) \cup D^*(R)} \cap R = \emptyset$ ,

34. Sprawdzić, czy zachodzą następujące wzory:

- (a)  $R \subset R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$
- (b)  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- (c)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- (d)  $I_X^{-1} = I_X$
- (e)  $(X^2)^{-1} = X^2$

35. Sprawdzić, co następuje:

- (a) aby relacja była przechodnia, potrzeba i wystarcza aby  $R \circ R \subset R$
- (b)  $I_X \circ I_Y = I_{X \cap Y}$
- (c)  $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$
- (d)  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
- (e)  $I_{D(R)} \subset R \circ R^{-1}$  oraz  $I_{D^*(R)} \subset R^{-1} \circ R$

36. Dla danego zbioru  $X$  oraz relacji  $R \subset X^2$ , sprawdzić czy podane relacje są relacjami równoważności, i wskazać klasy abstrakcji:

- (a)  $X = \{\text{liczby parzyste}\}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow 3 \mid_{x-y}$
- (b)  $X = \mathbb{C}$ ,  $z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow \mathbf{Re} z_1 = \mathbf{Re} z_2$
- (c)  $X = \mathbb{R}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow x - y = 2$
- (d)  $X = \mathbb{N}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow 2 \mid_{x+y}$
- (e)  $X = \mathbb{Z}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
- (f)  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow x + y \neq 3$
- (g)  $X = \mathbb{R}[t]$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow \exists_{a,b,c}(x - y = at^2 + bt + c)$
- (h)  $X = \mathbb{R}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow \exists_{a \in \mathbb{R}}(x + yi)^2 = ai$
- (i)  $X = \mathbb{R}$ ,  $x \rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$

37. Udowodnić, że dowolna relacja równoważności  $R$  na zbiorze  $S$  dzieli  $S$  na rozłączne klasy abstrakcji.

38. Zakładamy, że  $R_1, R_2 \subset X^2$  są relacjami równoważności. Sprawdzić czy prawdą jest iż:

- (a)  $R_1 \cap R_2$  jest relacją równoważności
- (b)  $R_1 \cup R_2$  jest relacją równoważności

## 4 Indukcja i rekurencja

1. Mamy następujący ciąg:

$$a_0 = 0, a_1 = N(a_0) = 1, a_2 = N(N(a_0)) = 2$$

ogólnie

$$a_n = \underbrace{N(N \dots (N(a_0)))}_{n \text{ razy } N}$$

Jakie elementy są budowane w ten sposób?

2. Udowodnić za pomocą indukcji matematycznej<sup>3</sup>, że:

(a)  $n(n+1)$  jest podzielna przez 2

(b)  $n^5 - n$  jest podzielna przez 5

(c)  $8^n - 2^n$  jest podzielna przez 6

(d)  $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$

(e)  $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

(f)  $\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  dla  $n \in \mathbb{P}$

(g)  $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{P}$

(h)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$  dla  $n \in \mathbb{P}$

(i)  $3 + 11 + \dots + (8n - 5) = 4n^2 - n$  dla  $n \in \mathbb{P}$

(j) dla każdej pary  $(m, n)$  gdzie  $m, n \in \mathbb{N}$  jest prawdą, że:  $m = n$  lub  $m = n + k$  lub  $n = m + k$  dla pewnego  $k$

(k)  $n \geq 2, n^2 > n - 1$

(l)  $n \geq 4, n! > 2^n$

(m)  $n \geq 4, n^3 > 2n + 1$

3. Wykaż, że warunek:

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

jest niezmiennikiem następującej pętli:

```
k = 0
while 0 ≤ k
  if  $\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$  then k = k + 1
```

4. Palindrom można zdefiniować jako łańcuch – słowo, które odczytane zarówno w przód, jak i wstecz brzmi tak samo. Można również podać następującą definicję:

(a)  $\epsilon$  jest palindromem,

(b) jeżeli  $a$  jest dowolnym symbolem, to łańcuch  $a$  jest palindromem,

(c) jeśli  $a$  jaki jakimkolwiek symbolem, a  $x$  jest palindromem, to  $axa$  jest palindromem.

(d) Nic innego nie jest palindromem, jeśli nie wynika to z reguł a,b,c.

Dowieść przez indukcję względem długości łańcucha, że obie definicje są równoważne.

5. Mamy następujący ciąg:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1)$$

---

<sup>3</sup>W zadaniu zakładamy naturalnie, że  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) na podstawie kilku pierwszych wartości odgadnąć wzór ogólny
- (b) udowodnić przez indukcję, czy otrzymany wzór jest prawdziwy

6. Mamy ciąg  $\text{seq}$  określony w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \text{seq}(0) &= 1 \quad \text{seq}(1) = 0 \\ \text{seq}(n) &= \text{seq}(n-2) \quad \text{dla } n \geq 2 \end{aligned}$$

- (a) Wypisać kilka pierwszych wyrazów tego ciągu.
- (b) Podać definicję zbioru wartości tego ciągu.

7. Podać definicję rekurencyjną dla następujących ciągów:

- (a)  $(2, 2^2, (2^2)^2, ((2^2)^2)^2, \dots)$ , czyli ciągu  $(2, 4, 16, 256, \dots)$
- (b)  $(2, 2^2, 2^{(2^2)}, 2^{(2^{(2^2)})}, \dots)$ , czyli ciągu  $(2, 4, 16, 65536, \dots)$

8. Czy następująca definicja jest poprawną definicją rekurencyjną:

$$\begin{aligned} (p) \quad \text{seq}(0) &= 1 \\ (r) \quad \text{seq}(n+1) &= \text{seq}(n)/(100-n) \end{aligned}$$

9. W sposób rekurencyjny zdefiniowano następujący ciąg:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- (a) obliczyć rekurencyjnie  $a_6$
- (b) udowodnić, że wszystkie wyrazy ciągu  $a_n$  są nieparzyste

10. Podać rekurencyjne definicje następujących funkcji:

- (a) silni
- (b) potęgowania
- (c)  $n$ -tej liczby Fibonacciego
- (d) uogólniony ciąg liczb Fibonacciego

11. Rozwiązać następującą zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} (p) \quad \mathcal{T}(0) &= t_c \\ (r) \quad \mathcal{T}(n) &= t_c + \mathcal{T}(n-1) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{aligned}$$

12. Podać wzór jawny na  $s_n$  dla następujących ciągów:

- (a)  $s_0 = 2, s_1 = -1$  oraz  $s_n = s_{n-1} + 6s_{n-2}$  gdy  $n \geq 2$
- (b)  $s_0 = 2$  oraz  $s_n = 5s_{n-1}$  gdy  $n \geq 1$
- (c)  $s_0 = 1, s_1 = 8$  oraz  $s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2}$  gdy  $n \geq 2$
- (d)  $s_0 = 1, s_1 = 4$  oraz  $s_n = s_{n-2}$  gdy  $n \geq 2$
- (e)  $s_0 = 1, s_1 = -3$  oraz  $s_n = -2s_{n-1} + 3s_{n-2}$  gdy  $n \geq 2$



13. Podać wzór jawny na  $s_{2^m}$  dla następujących ciągów:

- (a)  $s_{2n} = 2s_n + 3, s_1 = 1$
- (b)  $s_{2n} = 2s_n, s_1 = 3$
- (c)  $s_{2n} = 2s_n + 5n, s_1 = 0$
- (d)  $s_{2n} = 2s_n + 3 + 5n, s_1 = 2$

14. Podać wzór jawny na ciąg liczb Fibonacciego:

$$s_0 = 0, s_1 = 1, s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

15. Wiemy, że ciąg  $s_n$  spełnia poniższe nierówności oraz, że  $s_1 = 7$ . Podać oszacowanie jak duża może być liczba  $s_{2^m}$ :

- (a)  $s_{2n} \leq 2s_n + 1$
- (b)  $s_{2n} \leq 2(s_n + n)$

16. Opisać podzbiór  $T$  zbioru  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  zdefiniowany rekurencyjnie zgodnie z poniższymi regułami:

$$\begin{aligned} (p) & (0, 0) \in T \\ (r) & (m, n) \in T \Rightarrow (m, n+1) \in T \wedge (m+1, n+1) \in T \end{aligned}$$

17. Elementy zbioru  $S$  są tworzone w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (p) & (1) \in S \\ (r) & (n) \in S \Rightarrow (2n) \in S \end{aligned}$$

Wykazać, że

- (a)  $2^m \in S$  dla wszystkich  $m \in \mathbb{N}$ ,
- (b) jeśli  $n \in S$ , to liczba  $n$  jest postaci  $2^m$  dla pewnej liczby  $m \in \mathbb{N}$ .

18. Istnieje alfabet  $\Sigma$  o literach z alfabetu języka angielskiego. Wykazać, że następujące słowa

- (a) cat,
- (b) math,
- (c) zzpr,
- (d) aint.

Powstają na drodze zastosowanie następujących reguł:

$$\begin{aligned} (p) & \lambda \in \Sigma^* \\ (r) & w \in \Sigma^* \wedge x \in \Sigma \Rightarrow wx \in \Sigma^* \end{aligned}$$

19. Podzbiór  $S$  zbioru  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$\begin{aligned} (p) & (0, 0) \in S \\ (r) & ((m, n) \in S, m < n) \Rightarrow (m+1, n) \in S \wedge (m, m) \in S \Rightarrow (0, m+1) \in S. \end{aligned}$$

Pokazać za pomocą definicji rekurencyjnej, że  $(1, 2) \in S$  oraz odpowiedzieć czy podana definicja jest jednoznaczna?

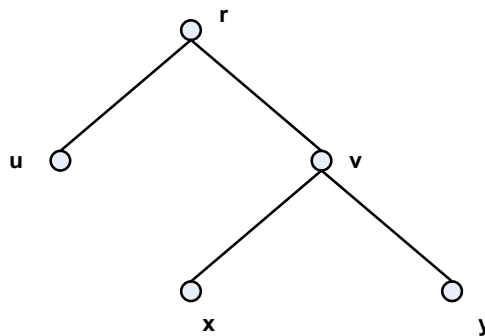
20. Niech  $\Sigma = \{a, b\}$  oraz niech  $S$  będzie zbiorem słów w  $\Sigma^*$ , w których symbole  $a$  poprzedzają  $b$ .

- (a) podać rekurencyjną definicję zbioru  $S$ ,
- (b) wykorzystując definicję wykazać, że  $abbb \in S$ ,
- (c) wykorzystując definicję wykazać, że  $aaab \in S$ ,
- (d) czy definicja zbioru  $S$  jest jednoznaczna?

21. Rekurencyjna definicja drzew z wyróżnionym korzeniem ma następującą postać:

- (p) graf mający jeden wierzchołek  $v$  i nie mający krawędzi jest trywialnym drzewem z wyróżnionym korzeniem  $v$ ,
- (r) jeśli  $T$  jest drzewem w wyróżnionym korzeniu  $r$  i graf  $T'$  powstaje przez dołączenie liścia do drzewa  $T$ , to  $T'$  jest drzewem z wyróżnionym korzeniem  $r$ .

Opisać przynajmniej dwa różne sposoby konstruowania drzewa z wyróżnionym korzeniem z następującego rysunku:



22. Zbiór liczb całkowitych został zdefiniowany w następujący sposób:

- (p)  $1 \in A$
- (r) jeśli  $n \in A$ , to  $2n \in A$  i jeśli  $3n + 1 \in A$ , przy czym  $n$  jest liczbą nieparzystą to  $n \in A$ .
- (a) wykazać że liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 należą do zbioru  $S$ ,
- (b) pokazać również, że  $7 \in S$ .

### Dodatkowe uzupełniające zadania z rekurencji i funkcji tworzących

23. Podać funkcje tworzące dla poniższych równań:

- (a)  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$  dla  $n > 1$ .
- (b)  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 0$  dla  $n < 0, a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + (-1)^{n+1}$  dla  $n > 1$ .
- (c)  $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + n$ , dla  $n \geq 1$ .
- (d)  $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + 1$ , dla  $n \geq 1$ .

(e)  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 0$  dla  $n < 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  dla  $n > 1$ .

(f)  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$  dla  $n > 1$ .

24. Dla rekurencji o poniższych funkcjach tworzących podać wzory jawne:

(a)  $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, a_0 = 1, a_1 = 2$ .

(b)  $A(x) = \frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 4$ .

(c)  $A(x) = \frac{2x^2+4x+1}{(1+x+x^2+x^3)(1+x)}, a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + (-1)^{n+1}$

## 5 Kombinatoryka i nieco rachunku prawdopodobieństwa

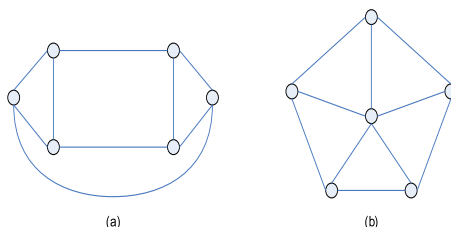
1. Podać prawo sumy i mnożenia skończonych zbiorów.
2. W pewnej grupie 150 osób, 45 regularnie pływa, 40 jeździ na rowerze a 50 uprawia jogging. Wiemy ponadto, że są 32 osoby, które uprawiają jogging ale nie jeżdżą na rowerze, 27 takich, które uprawiają jogging i pływają i 10 uprawiających wszystkie trzy rodzaje aktywności.
  - (a) Ile osób uprawia tylko jogging tzn. nie pływa i nie jeździ na rowerze?
  - (b) Jeśli wiemy dodatkowo że 21 osób jeździ na rowerze i pływa, to ile nie uprawia żadnej z powyższych aktywności.
3. Na ile sposobów można zawiesić na ścianie obok siebie trzy obrazy?
4. Ile liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można otrzymać z cyfr: 0,1,3,5?
5. W zespole występuje pięć tancerek i pięciu tancerzy. Zespół wchodzi na scenę jedynymi drzwiami, ale na początku zawsze idą panie. Ile istnieje wszystkich możliwych ustawień przy wejściu na scenę, jeśli członkowie zespołu przechodzą przez drzwi pojedynczo?
6. Z cyklu przygód Mamy i małej Kasi. Kasia postanowiła, że dla brata kupi pod choinkę prezent w postaci klocków Lego (zestaw kolejka). Klocki mają osiem różnokolorowych segmentów torów w tym cztery czerwone, trzy niebieskie i jeden żółty. Na ile sposób młodszy brat Kasi, będzie mógł połączyć segmenty aby zbudować tory dla kolejki?
7. Ile różnych słów (bez względu na sens) możemy zbudować ze słów:
  - (a) „matematyka”
  - (b) „dyskretna”
  - (c) „katarakta”
8. Ile liczb naturalnych parzystych sześciocyfrowych można utworzyć ze zbioru  $\{2, 3, 4, 5\}$ , wiedząc że cyfra trzy występuje w niej trzykrotnie, pozostałe zaś nie powtarzają się?
9. Ile liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z czteroelementowego zbioru cyfr  $\{1, 4, 5, 7\}$ ?
10. Mamy zbiór trzech różnych cyfr:  $\{5, 6, 7\}$ . Ile różnych liczb naturalnych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z elementów tego zbioru?

11. Ile istnieje trzycyfrowych liczb naturalnych zakończonych cyfrą 3 lub 5?
12. Iloma sposobami można rozmieścić 3 różnokolorowe klocki w dwóch pudełkach?
13. Na ile sposobów można wybrać dwie osoby spośród 10 osobowej grupy?
14. W turnieju tenisa rozegrano 21 meczy systemem „każdy z każdym”. Ilu zawodników bierze udział w turnieju, jeśli grają oni tylko raz?
15. Mamy cztery rodzaje słodczy i chcemy zrobić paczki świąteczne. W każdej paczce możemy umieścić sześć opakowań słodczy. Ile różnych paczek można utworzyć?
16. Graf pełny to taki graf że każda para wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią. Jeśli graf ma  $n$  wierzchołków to ile ma krawędzi?
  - (a) Jak wygląda macierzy sąsiedztwa takiego grafu?
17. Urna zawiera trzy czerwone i cztery czarne kule. Losowo wyciągnięto z urny trzy kule (bez zwracania). Podaj prawdopodobieństwo, że wśród tych trzech kul:
  - (a) wszystkie są czerwone,
  - (b) wszystkie są czarne
  - (c) jest jedna czerwona i dwie czarne,
  - (d) są dwie czerwone i jedna czarna
18. W pewnym eksperymencie otrzymaliśmy następujące wartości:  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.4$ . Wyznaczyć wartości następujących wyrażeń:
  - $P(B^c)$
  - $P(A \cup B)$
  - $P(A^c \cup B^c)$
19. Niech  $P$  będzie funkcją prawdopodobieństwa na przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$ . Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń  $E_1, E_2, E_3$  zachodzi:
 
$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$
20. Podać zasadę włączeń i wyłączeń dla  $n = 2$  oraz  $n = 3$ .
21. Ile jest liczb całkowitych w zbiorze  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ , które są podzielne przez 9, 11, 13 bądź przez 15.
22. Dwanaście identycznych listów ma zostać wrzuconych do czterech różnych skrzynek pocztowych:
  - (a) Na ile sposobów można rozmieścić listy?
  - (b) Ile istnieje możliwości, jeśli do każdej ze skrzynek muszą trafić co najmniej dwa listy?
23. Na ile sposobów można rozmieścić 14 przedmiotów w 3 pudełkach tak, aby:
  - (a) w jednym z pudełek znalazło się co najmniej 8 przedmiotów,

- (b) w żadnym pudełku nie znalazło się więcej niż 7 przedmiotów?
24. Podać wzór dwumianowy, oraz wyznaczyć rozwinięcia wyrażeń:
- (a)  $(x + 2y)^4$   
 (b)  $(3x + 1)^4$
25. Udowodnić, że  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  dla  $0 \leq r \leq n$ .
26. Udowodnić lemat o zliczaniu.
27. Ile różnych sygnałów można utworzyć umieszczając obok siebie w pionowej kolumnie dziewięć flag, z których 3 są białe, 2 czerwone, a 4 niebieskie?
28. Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć używając jedynie cyfr 3,4,5,6,7, oraz:
- (a) ile spośród wyznaczonych powyżej liczb ma jakieś powtarzające się cyfry,  
 (b) ile jest liczb parzystych,  
 (c) ile jest liczb większych niż 5000?
29. Podać zasadę szufladkową Dirichleta dla zbioru i funkcji oraz dowód dla obydwu przypadków.
30. W ośmiu pudełkach rozmieszczono 73 kulki.
- Wykazać, że jedno z pudełek zawiera co najmniej 10 kulek.
  - Wykazać, że jeśli dwa pudełka pozostały puste, to jakieś pudełko zawiera co najmniej 13 kulek.
31. Wykazać, dlaczego wśród trzech dowolnych liczb całkowitych muszą być dwie liczby których suma jest parzysta.
32. Zbiór  $A$  jest dziesięcioelementowym podzbiorem większego zbioru  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 50\}$ . Wykazać, że zbiór  $A$  ma dwa czteroelementowe podzbiory, mające równe sumy elementów.

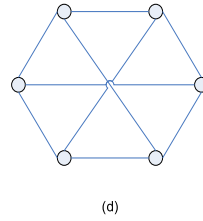
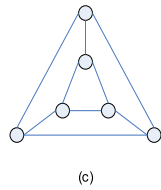
## 6 Podstawowe zagadnienia z teorii grafów

1. Sprawdzić które z podanych poniżej par grafów spełniają relację izomorfizmu:



2. Narysować po kilka przykładów następujących grafów:

- (a) graf regularny o czterech wierzchołkach z których każdy ma stopień 2



(b) graf regularny o czterech wierzchołkach z których każdy ma stopień 3

(c) graf regularny o pięciu wierzchołkach z których każdy ma stopień 3

3. Narysować pięć pierwszych grafów pełnych.

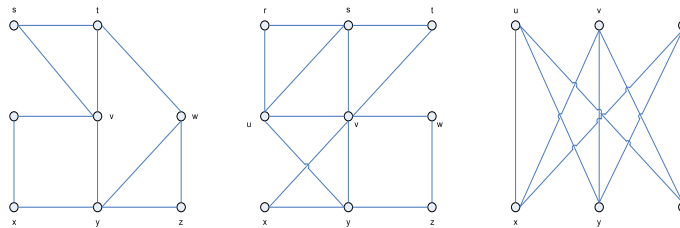
4. Mamy graf pełny  $K_8$  o wierzchołkach  $v_1, v_2, \dots, v_8$ .

(a) Ile podgrafów grafu  $K_8$  jest izomorficznych z grafem  $K_5$ ?

(b) Ile istnieje dróg prostych, prowadzących z wierzchołka  $v_1$  do wierzchołka  $v_2$  mających trzy lub mniej krawędzi?

(c) Jaka jest całkowita liczba dróg prostych o trzech lub mniej krawędziach w grafie  $K_8$ ?

5. Które z poniższych grafów mają cykle Eulera:



6. Zastosować algorytm Fleury'ego do sprawdzenia, czy w grafach z zadania powyżej jest cykl Eulera?

7. Zbudować graf mający zbiór wierzchołków  $\{0, 1\}^3$ , w którym wierzchołki  $v$  i  $w$  są połączone krawędzią, jeśli oznaczenia ciągów  $v$  i  $w$  różnią się w dwóch miejscach.

(a) Ile możliwych podgrafów uda się nam zbudować?

(b) Ile wierzchołków danego stopnia ma ten graf?

(c) Czy ten graf ma cykl Eulera??

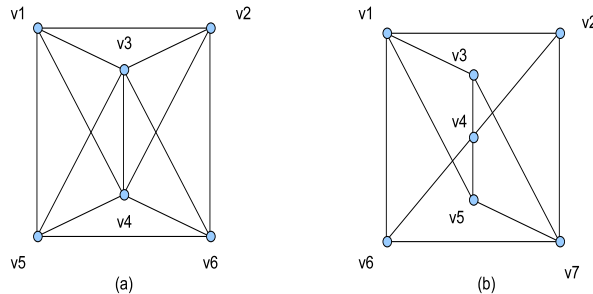
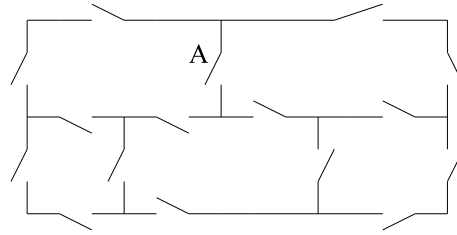
8. Poniższy rysunek przedstawia plan pięciopokojowego domu. Czy można obejść cały dom i przez każde drzwi przejść tylko raz? Czy nadal będzie można obejść dom przechodząc przez każde drzwi tylko raz, jeśli zamknięte zostaną drzwi oznaczone literą „A”?

9. Po poniższym rysunku mamy dwa grafy.

(a) Czy są to grafy hamiltonowskie?

(b) Czy są to grafy pełne?

(c) Czy są to grafy dwudzielne?

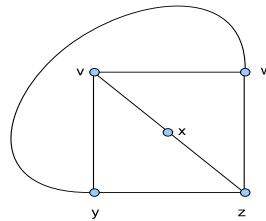


(d) Czy są to pełne grafy dwudzielne?

10. Mamy graf który ma zbiór wierzchołków  $\{0, 1\}^3$  i krawędź między wierzchołkami zawsze wtedy, gdy wierzchołki różnią się na dwóch współrzędnych. Czy taki graf ma cykl Hamiltona? Czy ma on drogę Hamiltona?

11. Dopełnieniem grafu  $G$  jest graf mający zbiór wierzchołków  $V(G)$  i mający krawędź między różnymi wierzchołkami  $v$  i  $w$ , jeśli graf  $G$  nie ma krawędzi łączącej  $v$  i  $w$ .

(a) Narysować dopełnienie grafu przedstawionego na poniższym rysunku.



(b) Ile składowych ma dopełnienia grafu z poprzedniego punktu?

(c) Pokazać, że jeśli  $G$  nie jest grafem spójnym, to jego dopełnienie jest grafem spójnym.

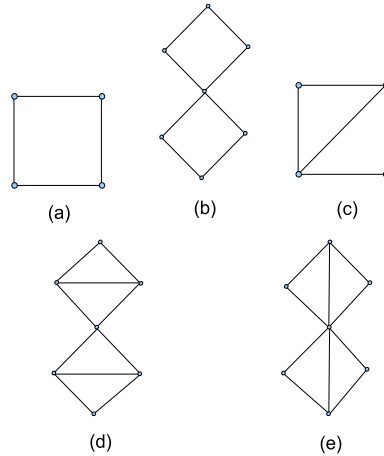
(d) Czy zdanie odwrotne do zdania z punktu powyżej jest prawdziwe?

(e) Podać przykład grafu, który jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem.

12. Narysować wszystkie drzewa mające sześć wierzchołków.

13. Podać liczbę drzew spinających dla grafów przedstawionych na poniższym rysunku:

14. Wiemy że drzewo o  $n$  wierzchołkach ma dokładnie  $n - 1$  krawędzi a suma stopni wierzchołków tego drzewa wynosi dokładnie  $2n - 2$ . Pewne drzewo ma dwa wierzchołki stopnia 4, jeden wierzchołek stopnia 3 oraz jeden wierzchołek stopnia 2. Jeśli inne wierzchołki są stopnia 1 to ile wierzchołków znajduje się w tym grafie?



15. Pokazać, że istnieje drzewo mające sześć wierzchołków stopnia 1, jeden wierzchołek stopnia 2, jeden wierzchołek stopnia 3 oraz jeden wierzchołek stopnia 5.
16. Naskicować drzewo mające co najmniej jedną krawędź i nie mające liści.

## 7 Teoria liczb

1. Wyznaczyć iloraz i resztę według algorytmu dzielenia dla następujących par:

- (a)  $n = 20, p = 3$
- (b)  $n = -20, p = 4$
- (c)  $n = 371246, p = 65$
- (d)  $n = -371246, p = 65$

2. Podać definicję algorytmu NWD:

- (a) rekurencyjna z resztą z dzielenia
- (b) iteracyjna z dzieleniem (oraz wersję przydatną do rozwiązywania kongruencji)

3. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik dla następujących par liczb:

- (a)  $m = 20, n = 20$
- (b)  $m = 20, n = 1$
- (c)  $m = 20, n = 10$
- (d)  $m = 17, n = 34$
- (e)  $m = 170, n = 850$
- (f)  $m = 2890, n = 850$

4. Utworzyć tablice dodawania i mnożenia w zbiorze  $\mathbb{Z}_6$ .

5. Rozwiązać następujące równania w zbiorze  $\mathbb{Z}_6$ :

- (a)  $1 +_6 x = 0$



(b)  $2 +_6 x = 0$

(c)  $3 +_6 x = 0$

(d)  $4 +_6 x = 0$

(e)  $5 +_6 x = 0$

6. Rozwiązać następujące równania w zbiorze  $\mathbb{Z}_5$ :

(a)  $1 *_5 x = 1$

(b)  $2 *_5 x = 1$

(c)  $3 *_5 x = 1$

(d)  $4 *_5 x = 1$

7. Pokazać, że czterocyfrowa liczba  $n = abcd$  jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr  $a + b + c + d$  jest podzielna przez 9.

8. Rozwiązać następujące kongruencje:

(a)  $10x \equiv 1 \pmod{37}$

(b)  $5x \equiv 1 \pmod{26}$

(c)  $17x \equiv 1 \pmod{26}$

(d)  $8x \equiv 6 \pmod{15}$

(e)  $643x \equiv 1 \pmod{2000}$

9. Rozwiązać układy kongruencji:

(a) 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{13} \\ x \equiv 65 \pmod{99} \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{13} \\ x \equiv 65 \pmod{99} \end{cases}$$

10. Rozwiązać układy kongruencji stosując Chińskie twierdzenie o resztach:

(a) 
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

11. Obliczyć następujące potęgi modularne:

(a)  $12^{56} \bmod 7$

(b)  $3^{1853} \bmod 13$

(c)  $4^{4000} \bmod 12$

(d)  $8^{234} \bmod 18$

(e)  $15^{90} \bmod 11$

(f)  $3^{10000000} \bmod 5$

(g)  $3^{333333} \bmod 33$

12. Dokonać faktoryzacji następujących liczb:

(a) 513, 76, 72, 5183, 427

(b) 201, 147, 26, 126, 86

13. Udowodnić, że dla  $p \in P$  oraz  $m, n, r \in \mathbb{Z}_p$  prawdziwe są następujące działania:

(a)  $m +_p n = n +_p m$

(b)  $m *_p n = n *_p m$

(c)  $(m +_p n) +_p r = m +_p (n +_p r)$

(d)  $(m *_p n) *_p r = m *_p (n *_p r)$

(e)  $(m +_p n) *_p r = (m *_p r) +_p (n *_p r)$

## 8 Literatura

Podstawową pozycją jest podręcznik *Matematyka dyskretna*, pozostałe pozycje należy traktować jako uzupełniające.

1. Kenneth A.Ross, Charles R.B.Wirght, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000
2. R.L.Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002
3. Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998
4. Robin J.Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004
5. S.W.Jabłoński, *Wstęp do matematyki dyskretniej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991,

## 9 Dodatkowe materiały

### Prawa algebry zbiorów

1. 
$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} \text{prawa przemienności}$$
2. 
$$\left. \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right\} \text{prawa łączności}$$
3. 
$$\left. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right\} \text{prawa rozdzielności}$$
4. 
$$\left. \begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array} \right\} \text{prawa idempotentności}$$
5. 
$$\left. \begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A \cup U = U \\ A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cap U = A \end{array} \right\} \text{prawa identyczności}$$
6. 
$$(A^c)^c = A \} \text{prawa podwójnego dopełnienia}$$
7. 
$$\begin{array}{l} A \cup A^c = U \\ A \cap A^c = \emptyset \end{array}$$
8. 
$$\begin{array}{l} U^c = \emptyset \\ \emptyset^c = U \end{array}$$
9. 
$$\left. \begin{array}{l} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{array} \right\} \text{prawa de Morgana}$$

### Zdania logicznie równoważne

Przez  $t$  oznaczamy dowolną tautologię, a przez  $c$  dowolne zdanie sprzeczne

1. 
$$(\neg\neg p) \Leftrightarrow p \} \text{prawa podwójnego przeczenia}$$
2. 
$$\left. \begin{array}{l} (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \\ (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \\ (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \end{array} \right\} \text{prawa przemienności}$$
3. 
$$\left. \begin{array}{l} ((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \\ ((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \end{array} \right\} \text{prawa łączności}$$
4. 
$$\left. \begin{array}{l} (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \\ (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \end{array} \right\} \text{prawa rozdzielności}$$
5. 
$$\left. \begin{array}{l} (p \vee p) \Leftrightarrow p \\ (p \wedge p) \Leftrightarrow p \end{array} \right\} \text{prawa idempotentności}$$

6. 
$$\left. \begin{array}{l} (p \vee c) \Leftrightarrow p \\ (p \vee t) \Leftrightarrow t \\ (p \wedge c) \Leftrightarrow c \\ (p \wedge t) \Leftrightarrow p \end{array} \right\} \text{prawa identyczności}$$
7. 
$$\begin{array}{l} (p \vee \neg p) \Leftrightarrow t \\ (p \wedge \neg p) \Leftrightarrow c \end{array}$$
8. 
$$\left. \begin{array}{l} \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \\ \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \end{array} \right\} \text{prawa De Morgana}$$
9. 
$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \} \text{prawa kontrapozycji}$$
10. 
$$\left. \begin{array}{l} (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \\ (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \end{array} \right\} \text{określenie implikacji za pomocą alternatywy lub koniunkcji}$$
11. 
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q) \\ (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q) \end{array}$$
12. 
$$\begin{array}{l} ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r) \\ ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)) \end{array}$$
13. 
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \} \text{określenie równoważności}$$
14. 
$$((p \wedge q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \} \text{prawa eksportacji}$$
15. 
$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow c) \} \text{reductio ad absurdum}$$

### Implikacje logiczne

16.  $p \Rightarrow (p \vee q) \} \text{wprowadzenie alternatywy}$
17.  $(p \wedge q) \Rightarrow p \} \text{opuszczenie koniunkcji}$
18.  $(p \rightarrow c) \Rightarrow \neg p \} \text{sprowadzanie do sprzeczności}$
19.  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow p \} \text{modus ponendo ponens}$
20.  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p \} \text{modus tollendo tollens}$
21.  $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q \} \text{modus ponendo tollens}$
22.  $p \Rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
23.  $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \leftrightarrow r) \} \text{przechodność } \leftrightarrow$
24.  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r) \} \text{przechodność } \rightarrow$
25. 
$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r)) \\ (p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)) \\ (p \rightarrow q) \Rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \end{array}$$

26.  $\left. \begin{array}{l} ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s)) \\ ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)) \end{array} \right\}$  prawa dylematu konstrukcyjnego
27.  $\left. \begin{array}{l} ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)) \\ ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\neg q \wedge \neg s) \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)) \end{array} \right\}$  prawa dylematu destrukcyjnego

### Reguły wnioskowania

28.  $\left. \frac{P}{P \vee Q} \right\}$  reguła wprowadzania alternatywy

29.  $\left. \frac{P \wedge Q}{P} \right\}$  reguła opuszczania koniunkcji

30.  $\left. \frac{P \rightarrow Q}{Q} \right\}$  reguła modus ponendo ponens

31.  $\left. \frac{P \rightarrow Q}{\neg Q} \right\}$  reguła modus tollendo tollens

32.  $\left. \frac{P \vee Q}{\neg P} \right\}$  reguła modus ponendo tollens

33.  $\left. \frac{P \rightarrow Q}{Q \rightarrow R} \right\}$  reguła sylogizmu hipotetycznego

34.  $\left. \frac{P}{Q} \right\}$  reguła wprowadzania koniunkcji

### Złożenie relacji

Złożenie relacji (inna nazwa to *iloczyn względny relacji*) określa następująca definicja:

$$\varrho_1 \circ \varrho_2 = \{(x, y) \exists z (x, z) \in \varrho_1 \wedge (z, y) \in \varrho_2\}$$

### Hierarchia ciągów

Poniżej znajduje się hierarchia ciągów uporządkowanych w taki sposób, że każdy z ciągów jest ograniczony ciągami na prawo od niego<sup>4</sup>:

$$1, \log_2 n, \dots, \sqrt[4]{n}, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n \log_2 n, n\sqrt{n}, n^2, n^3, n^4, \dots, 2^n, n!, n^n$$

<sup>4</sup>Dla pewnego  $n \in N$ .

## Algorytm dzielenia

Niech  $n \in \mathbb{P}$ . Dla każdej liczby całkowitej  $m$  istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych  $q$  i  $r$  spełniających warunki:

$$m = nq + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < n$$

Parę  $q$  i  $r$  możemy wyznaczyć przeprowadzając w sposób iteracyjny następujące obliczenia:

```
q ← 0
r ← m
while (r ≥ n)
    q ← q + 1
    r ← r - n
```

## Algorytm Euklidesa – NWD

Algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika można zapisać w postaci następującej równości:

$$\text{NWD}(m, n) = \text{NWD}(n, m \bmod n)$$

Algorytm zapisany w pseudokodzie prezentuje się następująco:

```
function nwd(m, n)
    a ← m
    b ← n
    while (b > 0) do
        (a, b) ← (b, a mod b)
    nwd=a;
```

Istnieje także wersja iteracyjna która prezentuje się następująco:

```
function nwd(m, n)
    a ← m
    b ← n
    while (b > 0) do
        q ← a div b
        (a, b) ← (b, a - qb)
    nwd=a;
```

Natomiast wersja algorytmu przydatna do rozwiązywania kongruencji wygląda tak:

```
function nwd(m, n) : (d, s, t) { d=s*m + t*n }
    a ← m ; ap ← n
    s ← 1 ; sp ← 0
    t ← 0 ; tp ← 1
    while (ap > 0) do
        q=a div ap
        (a, ap) ← (ap, a - q*ap)
        (s, sp) ← (sp, s - q*sp)
        (t, tp) ← (tp, t - q*tp)
    nwd=(a, s, t)
```

## Izomorfizm grafów

Jeśli  $G$  i  $H$  są grafami bez krawędzi wielokrotnych to:

**Definicja 1** *Izomorfizmem grafu  $G$  na graf  $H$  ( $G \simeq H$ ) nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne  $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$  takie, że  $\{u, v\}$  jest krawędzią grafu  $G$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$  jest krawędzią w grafie  $H$ .*