

Lista nr 1

Ciągi liczbowe. Ciąg, jego własności i granica, liczba e.

Zad.1 Wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) , którego wyraz ogólny określony jest wzorem:

$$a) a_n = \frac{2n+1}{n}; \quad b) a_n = \frac{n+1}{(2n)!}; \quad c) a_n = (-2)^n; \quad d) a_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zad.2 Wyznaczyć wzory ogólne następujących ciągów:

$$a) (a_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots); \quad b) (a_n) = (1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots); \quad c) (a_n) = (0, 2, 0, 2, 0, \dots).$$

Zad.3 Zbadać monotoniczność ciągów o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad b) a_n = \sqrt[n]{2} - 1; \quad c) a_n = \frac{n^2+1}{n!}; \quad d) a_n = 2^n; \quad e) a_n = \ln n.$$

Zad.4 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \frac{n}{n+1}; \quad b) a_n = \frac{4n-3}{6-5n}; \quad c) a_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}; \quad d) a_n = \frac{4n^3-n+6}{2n^3-n^2+2n+1};$$
$$e) a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^n + 1}; \quad f) a_n = \frac{(n^{20} + 2)^3}{(n^3 + 1)^{20}}; \quad g) a_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2; \quad h) a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}.$$

Zad.5 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \sqrt{n^2+n} - n; \quad b) a_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}; \quad c) a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1+1}}; \quad d) a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n.$$

Zad.6 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}; \quad b) a_n = \frac{4 \cdot 3^{2n} - 7}{5 \cdot 9^n + 2}; \quad c) a_n = \frac{2^{n+1} - 3^{n-2}}{3^{n+2}}; \quad d) a_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n}.$$

Zad.7 Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \sqrt[n]{5^n + 4^n + 3^n}; \quad b) a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}; \quad c) a_n = \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}; \quad d) a_n = \sqrt[n]{2n^4 + n^2 + 1}.$$

Zad.8 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \quad b) a_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n; \quad c) a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}; \quad d) a_n = \left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{3n+4}; \quad e) a_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2+2}\right)^{n^2}.$$

Zad.9 Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}; \quad b) a_n = \frac{9^{\log_5 n}}{4^{\log_2 n}}; \quad c) a_n = \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}.$$

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)

W. Krywicki, L. Włodarski „Analiza matematyczna w zadaniach” (część pierwsza)

M. Grabowski „Analiza matematyczna”