Lista nr 2

Funkcje elementarne i ich własności. Funkcja złożona i odwrotna.

Zad.1 Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Jak z tego wykresu otrzymać wykres funkcji:

$$|f(x)|,\ a+f(x),\ f(x+b),\ f(cx),\ f(-x),\ -f(x), \qquad \text{gdzie } a,b,c \in R.$$

Zad.2 Sporządzić wykresy funkcji określonych wzorami oraz wypisać co najmniej pięć jej własności:

a) $f(x) = \left||x+1|-5\right|$, b) $f(x) = \left|\frac{4}{x-3}-2\right|$, c) $f(u) = \frac{1}{2}(\sin u + |\sin u|)$, d) $g(x) = [x+1]-2$,

e) $f(t) = \operatorname{sgn}\frac{t-1}{t+1}$, f) $f(r) = |3^{r+3}-2|$, g) $h(x) = \log_2|x+1|$,

h) $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x+4 & \text{dla} \quad x<3 \\ 1 & \text{dla} \quad x=3, \\ (x-3)^2 & \text{dla} \quad x>3 \end{cases}$ i) $f(x) = \begin{cases} -\log(-x) & \text{dla} \quad x \le -1 \\ x+1 & \text{dla} \quad x \in (-1,0) \\ 2^x & \text{dla} \quad x \in <0,2) \\ \sqrt{8x} & \text{dla} \quad x \ge 2. \end{cases}$.

Zad.3 Wyznaczyć dziedzinę następujących funkcji:

a) $f(x) = \log(1-2\cos x)$, b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{4-x}}{\log(x^2-4)}$, c) $f(t) = \arcsin(\log t)$.

Zad.4 Wyznaczyć okres podstawowy funkcji (jeśli istnieje):

a) $f(x) = 3\sin\frac{3}{4}x$,b) $f(x) = \sin x + \cos\sqrt{3}x$,c) $f(x) = 2\sin 3x + 3\cos 2x$, d) $g(x) = x - [x]$.

Zad.5 Wykazać, że $f(x) = 2\log(x+1)$ jest różnowartościowa w całej dziedzinie.

Zad.6 Na podstawie definicji ustalić, które z podanych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

a) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 2, x \in <-1,2>$, b) $f(x) = 2^x + 2^{-x}x^2\cos x$, c) $g(x) = |2x|\frac{1}{x}$,

d) $f(x) = x\log\frac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}$, e) $g(x) = \log\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)$.

Zad.7 Zbadać monotoniczność funkcji:

a) $f(x) = 2x^2 + x, x \in <-4,-\frac{1}{4}>$, b) $g(x) = 3^x + 2$, c) $h(x) = \frac{2x}{x+1}, x \in (-1,\infty)$.

Zad.8 Wyznaczyć $f(g(x)),\ g(f(x))$ (jeśli to możliwe), gdy:

a) $f(x) = x^2 + 3$ i $g(x) = \sqrt{x-1}$, b) $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \log x$.

Zad.9 Wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej do danej (jeśli to możliwe):

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, x \in <1,\infty)$, b) $g(x) = 2^x, x \in R$, c) $h(x) = \ln x, x > 0$.

Zad.10 Cukier jest sprzedawany w jednokilogramowych torebkach oraz w workach zawierających 50 takich torebek. Cena jednego worka wynosi 80 zł, a torebki 2 zł. Znaleźć funkcję podającą, jaką maksymalną liczbę kilogramów cukru może kupić przedsiębiorca dysponujący kwotą x złotych. Narysować wykres tej funkcji. Jak będzie wyglądał wykres te funkcji, gdy przyjmiemy, że $x \in N \cup \{0\}$?

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „ Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)
M. Grabowski „Analiza matematyczna”
W.Stankiewicz "Zadania z matematyki dla WUT"